Lösningsförslag till tentamen
Måndagen den 5 juni 2017

DEL A

1. En kulles höjd ges av $z = 60 - 0{,}02x^2 - 0{,}01y^2$ där enheten är meter på alla tre koordinataxlar.
   (a) I vilken riktning i xy-planet ska vi röra oss för att komma ner snabbast om vi befinner oss i punkten $(50, 100, -90)$? **(2 p)**
   (b) Hur snabbt ändras höjden i punkten $(50, 100, -90)$ om vi rör oss i riktningen enligt del (a) med farten 1 km/h sett uppifrån? **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Största ökningen för funktionen $z(x, y)$ ges i riktningen av dess gradient, som är vektorfältet

$$(-0{,}02 \cdot 2x, -0{,}01 \cdot 2y) = \frac{1}{100}(-4x, -2y).$$

För att komma ner snabbast ska vi röra oss i motsatt riktning, vilket i den aktuella punkten är

$$-\frac{1}{100}(-4 \cdot 50, -2 \cdot 100) = (2, 2).$$

Vi ska alltså röra oss i riktningen av vektorn $(2, 2)$, eller om man vill svara med en enhetsvektor, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

(b) Riktningsderivatan av $z(x, y)$ i riktningen av minus dess gradient ges av minus längden av gradientvektorn. I den aktuella punkten alltså

$$-|(2, 2)| = -2\sqrt{2}.$$

Då vi rör oss med hastigheten 1000 m/tim i xy-led blir förändringshastigheten i z-led

$$2\sqrt{2} \cdot 1000 \,\text{m/tim}.$$

Svar.

(a) Man ska röra sig i riktningen $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.
(b) Hastigheten i z-led blir $2\sqrt{2}$ km/h, dvs c:a 2,8 km/h.

2. Bevisa formeln $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$ för volymen av ett klot med radie a genom att införa sfäriska koordinater i trippelintegralen
$$V = \iiint_K dV,$$
där klotet K ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Vi vet att att $\iiint_K dV$ ger volymen av klotet K. I sfäriska koordinater beskrivs klotet av olikheterna $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Integralen i sfäriska koordinater blir alltså
$$\begin{aligned}\iiint_K dV &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi \int_0^a r^2\, dr \\ &= [\theta]_0^{2\pi} \, [-\cos\phi]_0^{\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a \\ &= 2\pi \cdot (-(-1) - (-1)) \cdot \frac{a^3}{3} \\ &= \frac{4\pi a^3}{3},\end{aligned}$$
och därmed har vi bevisat formeln.

3. Avgör vilket av fälten
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \big(x(z-1), -yz, z-x^2\big)$$
och
$$\mathbf{G}(x,y,z) = \big(y^2+(2x-y)z, x(2y-z), x(x-y)\big)$$
som är konservativt och bestäm en potential till detta. **(4 p)**

Lösningsförslag. Observera att rotationsfria fält som är definierade i hela $\mathbb{R}^3$ alltid är konservativa, men om de bara är definierade på en delmängd av $\mathbb{R}^3$ behöver de inte vara konservativa.

Vi beräknar rotationen av de bägge fälten och får
$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\,\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z-x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(-yz), \frac{\partial}{\partial z}x(z-1) - \frac{\partial}{\partial x}(z-x^2), \frac{\partial}{\partial x}(-yz) - \frac{\partial}{\partial y}x(z-1)\right)\\ &= (0-(-y), x-(-2x), 0-0) = (y, 3x, 0) \neq (0,0,0)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\,\mathbf{G}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial}{\partial y}x(x-y) - \frac{\partial}{\partial z}x(2y-z), \frac{\partial}{\partial z}(y^2+(2x-y)z) - \frac{\partial}{\partial x}x(x-y),\right.\\ &\qquad \left.\frac{\partial}{\partial x}x(2y-z) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2+(2x-y)z)\right)\\ &= (-x-(-x), 2x-y-(2x-y), 2y-z-(2y-z)) = (0,0,0).\end{aligned}$$
Alltså är $\mathbf{G}$ rotationsfritt, men inte $\mathbf{F}$. Vi kan bestämma en potential till $\mathbf{G}$ genom att först integrera x-komponenten i x-led och får
$$\Phi(x,y,z) = xy^2 + x^2z - xyz + H(y,z).$$
När vi deriverar $\Phi(x,y,z)$ med avseende på y och z får vi
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2xy - xz + \frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = x^2 - xy + \frac{\partial H}{\partial z}$$
och eftersom $2xy - xz = x(2y-z)$ och $x^2 - xy = x(x-y)$ kan vi välja $H(y,z) = 0$. Alltså är $\Phi(x,y,z) = xy^2 + x^2z - xyz$ en potential till $\mathbf{G}$.

Svar. Fältet $\mathbf{G}$ är konservativt med potential $\Phi(x,y,z) = xy^2 + x^2z - xyz$ medan fältet $\mathbf{F}$ inte är konservativt.

DEL B

4. Den elliptiska cylindern $9x^2 + 25y^2 = 225$ och planet $4y + 3z = 0$ skär varandra i en kurva $\mathcal{C}$.
   (a) Ge en parametrisering av kurvan $\mathcal{C}$. **(2 p)**
   (b) Beräkna längden av kurvan $\mathcal{C}$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Ellipsen E i planet $z = 0$ ges av ekvationen $9x^2 + 25y^2 = 225$, eller på standardform
$$\frac{1}{5^2}x^2 + \frac{1}{3^2}y^2 = 1.$$
Denna kurva kan vi parametrisera som $(5\cos(t), 3\sin(t))$, med $0 \leq t \leq 2\pi$. Den kurva vi söker ligger ovanför ellipsen E, där z-värdet ges av planet $4y + 3z = 0$. Med andra ord att $z = -\frac{4}{3}y$. Detta ger att den sökta kurvan $\mathcal{C}$ ges av
$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (5\cos t, 3\sin t, -4\sin t)$$
för $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) Kurvans längd ges av
$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} ds &= \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)|\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-5\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + (-4\cos t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{25\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16\cos^2 t}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{25}\, dt = 2\pi \cdot 5 = 10\pi.\end{aligned}$$

(Observera att kurvan är en cirkel med radie 5. Hade vi valt ett annat plan hade skärningen blivit en ellips och då kan inte kurvlängden beräknas med hjälp av elementära funktioner.)

Svar.

(a) En parametrisering ges av $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (5\cos t, 3\sin t, -4\sin t)$.

(b) Längden av kurvan är 10π längdenheter.

5. Låt $f(x, y) = x^2 + 2xy - 5y^2$ och $g(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$.
   (a) Bestäm största och minsta värde för $f(x, y)$ givet att $g(x, y) = 10$ om dessa existerar. **(2 p)**
   (b) Bestäm största och minsta värde för $g(x, y)$ givet att $f(x, y) = 10$ om dessa existerar. **(2 p)**

Lösningsförslag. Lagranges villkor ger i båda fall att gradienterna, $\nabla f(x, y) = (2x + 2y, 2x - 10y)$ och $\nabla g(x, y) = (2x - 2y, -2x + 4y)$, ska vara parallella, vilket vi kan ställa upp som

$$\begin{cases} 2x + 2y &= \lambda(2x - 2y) \\ 2x - 10y &= \lambda(-2x + 4y) \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} 2x - 2y &= \lambda(2x + 2y) \\ -2x + 4y &= \lambda(2x - 10y) \end{cases}$$

Båda dessa leder till att $(2x + 2y)(-2x + 4y) = (2x - 2y)(2x - 10y)$ vilket förenklas till $2x^2 - 7xy + 3y^2 = 0$. Vi löser denna som

$$x = \frac{7y}{4} \pm y\sqrt{\frac{49}{16} - \frac{3}{2}} = \frac{7y}{4} \pm y\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{7y}{4} \pm \frac{5y}{4}$$

dvs $x = 3y$ eller $x = y/2$.

(a) Lösningarna till $g(x, y) = 10$ utgör en ellips eftersom vi kan skriva det som $(x - y)^2 + y^2 = 10$. Därmed vet vi att det kommer att finnas ett största och ett minsta värde för $f(x, y)$ på denna kompakta mängd. Dessa måste uppfylla Lagrangevillkoret eftersom det inte finns några singulära punkter. Vi sätter in $x = 3y$ i ekvationen och får $9y^2 - 6y^2 + 2y^2 = 10$, dvs $5y^2 = 10$. Därmed ges lösningarna av $y = \pm\sqrt{2}$ och vi har $f(3y, y) = 9y^2 + 6y^2 - 5y^2 = 10y^2 = 20$. När vi sätter in $x = y/2$, dvs $y = 2x$ i ekvationen får vi $x^2 - 4x^2 + 8x^2 = 10$, dvs $5x^2 = 10$ och $x = \pm\sqrt{2}$ och vi har $f(x, 2x) = x^2 + 4x^2 - 20x^2 = -15x^2 = -30$. Det största värdet är alltså $f(3\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(-3\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 20$ och det minsta $f(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) = -30$.

(b) Lösningarna till $f(x, y) = 10$ utgör en obegränsad kurva eftersom vi kan skriva det som $(x + y)^2 - 6y^2 = 10$, vilket ger $x = -y \pm \sqrt{10 + 6y^2}$. Därmed kan funktionen $g(x, y)$ anta godtyckligt stora värden. Däremot är $g(x, y)$ nedåt begränsad eftersom $g(x, y) = (x - y)^2 + y^2 \geq 0$. Funktionens minsta värde måste antas i en punkt på ett begränsat område och dessa punrkter måste uppfylla Lagrangevillkoret eftersom det inte finns några singulära punkter. Vi sätter in $x = 3y$ i ekvationen och får $9y^2 + 6y^2 - 5y^2 = 10$, dvs $10y^2 = 10$. Därmed ges lösningarna av $y = \pm 1$ och vi har $g(3y, y) = 9y^2 - 6y^2 + 2y^2 = 5y^2 = 5$. När vi sätter in $x = y/2$, dvs $y = 2x$ i ekvationen får vi $x^2 + 4x^2 - 20x^2 = 10$, dvs $-15x^2 = 10$ som saknar lösningar. Funktionen saknar största värde och det minsta värdet är $f(3, 1) = f(-3, -1) = 5$.

Svar.
(a) Maximum är 20 och minimum är -30.
(b) Maximum saknas och minimum är 5.

6. En snöboll i formen av ett klot centrerad i origo och med radie a belyses av solen som befinner sig långt bort på den positiva y-axeln. Bestäm den instrålande effekten
$$-\iint_S (0,-I,0)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS,$$
där S är den del av klotets yta som uppfyller $y > 0$ och därmed är belyst av solen, I är solens intensitet, $\hat{\boldsymbol{n}}$ är ytans utåtpekande normal och dS är arealementet. **(4 p)**

Lösningsförslag. Halvklotets yta kan beskrivas i rymdpolära (sfäriska) koordinater som
$$r = a, \quad \phi\colon 0\to\pi, \quad \theta\colon 0\to\pi.$$
Genom att använda vinklarna ϕ och θ för att parametrisera ytan har vi att
$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\,dS &= r\sin\phi\,\boldsymbol{r}\,d\phi\,d\theta\\ &= a\sin\phi\,(a\sin\phi\cos\theta, a\sin\phi\sin\theta, a\cos\phi)\,d\phi\,d\theta.\end{aligned}$$
Den instrålande effekten blir då
$$\begin{aligned}-\iint_S (0,-I,0)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS &= \iint_{\substack{\phi\colon 0\to\pi\\ \theta\colon 0\to\pi}} a\sin\phi\cdot a\sin\phi\sin\theta\, I\,d\phi\,d\theta\\ &= a^2 I\int_0^\pi \sin^2\phi\,d\phi\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\\ &= a^2 I\int_0^\pi \left(\frac{1-\cos(2\phi)}{2}\right)d\phi\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\\ &= a^2 I\cdot\left[\frac{\phi}{2}-\frac{\cos(2\phi)}{4}\right]_0^\pi\cdot[-\cos\theta]_0^\pi\\ &= a^2 I\cdot\pi/2\cdot 2\\ &= \pi a^2 I.\end{aligned}$$

Vi kan också använda divergenssatsen för att lösa uppgiften. Fältet är konstant och därmed divergensfritt. Om vi ser på den belysta delen av snöbollen och sluter till ytan genom att lägga till en cirkelskiva genom centrum får vi en sluten yta och därmed är nettoflödet genom denna noll. Därmed blir inflödet genom den givna ytan lika med utflödet genom cirkelskivan genom origo. Denna har area πa^2 och fältet har konstant styrka I vinkelrätt mot skivan vilket ger flödet $\pi a^2 I$.

Svar. Den instrålade effekten är $\pi a^2 I$.

DEL C

7. Ett område som ligger på ena sidan om ett plant snitt genom en sfär kallas för en *sfärisk kalott*. Beräkna arean av den sfäriska kalott som ges av
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq h,$$
där a och h är konstanter med $0 < h < a$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Låt oss parametrisera vår sfäriska kalott med hjälp av x och y. Vi får parametriseringen
$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2})$$
där $(x, y) \in D$ som ges av $x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2$. Arean av den sfäriska kalotten Y blir nu

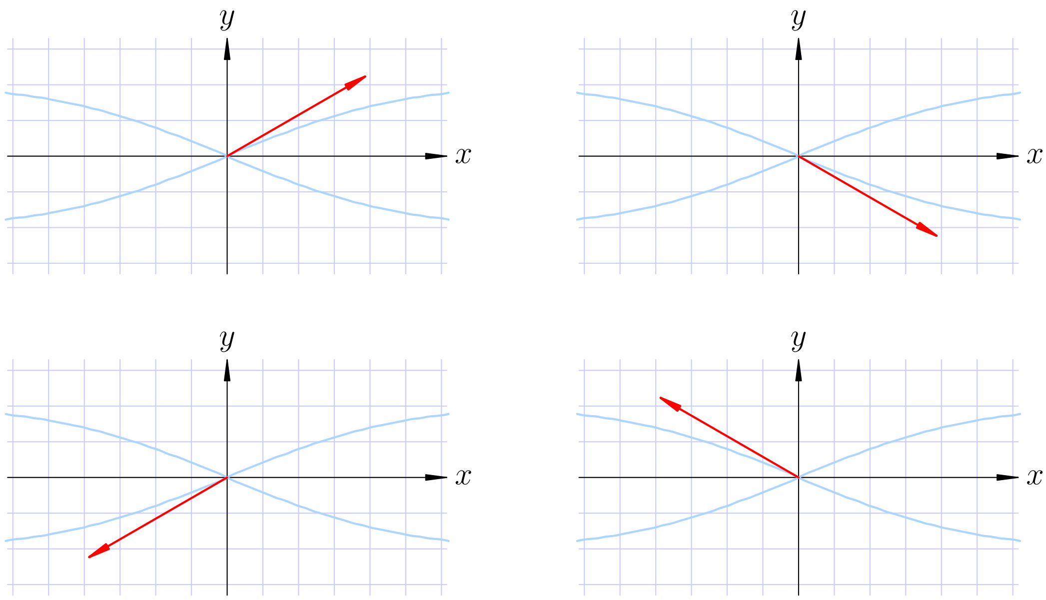
$$\begin{aligned}
\iint_Y dS &= \iint_D \left| \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right) \right| dxdy \\
&= \iint_D \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2} + 1}\, dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \left(\sqrt{\frac{r^2}{a^2 - r^2} + 1} \right) r\, dr \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \left(\sqrt{\frac{r^2 + a^2 - r^2}{a^2 - r^2}} \right) r\, dr \\
&= 2\pi a \int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right) r\, dr = \{u = a^2 - r^2, du = -2rdr\} \\
&= 2\pi a \int_{a^2}^{h^2} \frac{1}{\sqrt{u}} \left(-\frac{1}{2} \right) du \\
&= \pi a \int_{h^2}^{a^2} \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = \pi a \left[2\sqrt{u} \right]_{h^2}^{a^2} = 2\pi a(a - h).
\end{aligned}$$

Vi kan också använda sfäriska koordinater där ytan parametriseras av $r = a$, för $0 \leq \phi \leq \arccos(h/a)$ och $0 \leq \theta \leq 2\pi$ vilket ger arean

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^{\arccos(h/a)} a^2 \sin\phi\, d\phi d\theta &= a^2 \left[\theta\right]_0^{2\pi} \left[-\cos\phi\right]_0^{\arccos(h/a)} \\
&= 2\pi a^2(-h/a - (-1)) = 2\pi a(a - h).
\end{aligned}$$

Svar. Arean av kalotten är $2\pi a(a - h)$ areaenheter.

8. I origo har kurvan $\cos(x+y)+\cos(x-y)+4y^2 = 2$ en förgreningspunkt och består av fyra kurvstycken som möts där. Bestäm riktningsvektorn för respektive kurvstycke i origo.



Kurvan $\cos(x+y)+\cos(x-y)+4y^2 = 2$ och de sökta riktningsvektorerna.

(4 p)

Lösningsförslag. med hjäp av Taylorutvecklingen $\cos t = 1 - t^2/2 + O(t^3)$ för $\cos t$ kring $t = 0$ kan vi Taylorutveckla ekvationens vänsterled till ordning 2 kring origo och får då

$$2 - x^2 + 3y^2 + O(r^3) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{3}y - x)(\sqrt{3}y + x) + O(r^3) = 0,$$

där $r = |(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Dela båda led med $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\frac{\sqrt{3}y - x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{3}y + x}{\sqrt{x^2+y^2}} + O(r) = 0.$$

Låt $(x,y) \to (0,0)$. Då får vi att

$$\frac{\sqrt{3}y - x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{3}y + x}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0.$$

Eftersom ovanstående faktorer är kontinuerliga (i en punkterad omgivning av origo) och kurvan är sammanhängande i närheten av origo så medför detta att antingen

$$① \ \frac{\sqrt{3}y - x}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0 \quad \text{eller} \quad ② \ \frac{\sqrt{3}y + x}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0,$$

dvs.

$$\text{①}\ x = \sqrt{3}y + o(r) \quad \text{eller} \quad \text{②}\ x = -\sqrt{3}y + o(r).$$

Om fall ① inträffar har vi att enhetsvektorn i riktningen från origo till (x, y) blir

$$\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(\sqrt{3}y, y) + o(r)}{\sqrt{y^2+3y^2+o(r^2)}} = \frac{y}{|y|}\,\tfrac{1}{2}(\sqrt{3},1) + \frac{o(r)}{r} \to \begin{cases} \tfrac{1}{2}(\sqrt{3},1), & \text{om } x \to 0+ \\ -\tfrac{1}{2}(\sqrt{3},1), & \text{om } x \to 0- \end{cases}$$

Om fall ② inträffar har vi att enhetsvektorn i riktningen från origo till (x, y) blir

$$\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{(-\sqrt{3}y, y) + o(r)}{\sqrt{y^2+3y^2+o(r^2)}} = \frac{y}{|y|}\,\tfrac{1}{2}(-\sqrt{3},1) + \frac{o(r)}{r} \to \begin{cases} \tfrac{1}{2}(-\sqrt{3},1), & \text{om } x \to 0+ \\ \tfrac{1}{2}(\sqrt{3},-1), & \text{om } x \to 0- \end{cases}$$

De fyra riktningarna är alltså $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1)$ och $\pm\frac{1}{2}(-\sqrt{3}, 1)$.

Ett alternativt lösningssätt är att skriva om ekvationen som

$$2\cos x \cos y + 4y^2 = 2$$

med additionssatsen för cosinus. Gradienten av vänsterledet är $(-2\sin x\cos y, 8y^2 - \cos x \sin y)$ och eftersom den andra komponenten är skild från noll i närheten av origo kan vi lokalt lösa ut y som en funktion av x enligt implicita funktionssatsen. Att det finns punkter som uppfyller ekvationen i närheten av origo får vi ta för givet från uppgiftstexten och då kan vi använda implicita funktionssatsen för alla punkter på någon av de fyra kurvstyckena i en omgivning av origo.

Vi kan derivera ekvationen två gånger och får

$$-2\sin x\cos y - 2y'\cos x \sin y + 8y'y = 0$$

och

$$\begin{aligned} -2\cos x\cos y + 2y'\sin x\sin y - 2y''\cos x\sin y + 2y'\sin x\sin y \\ -2(y')^2\cos x\cos y + 8y''y + 8(y')^2 = 0 \end{aligned}$$

När vi närmar oss origo är gränsvärdena för $\sin x$, $\sin y$ och y noll, medan gränsvärdena för $\cos x$ och $\cos y$ är ett. Om α är gränsvärdet för y' och β är gränsvärdet för y'' får vi

$$-2\cdot 1\cdot 1 + 2\alpha\cdot 0\cdot 0 - 2\beta\cdot 1\cdot 0 + 2\beta\cdot 0\cdot 0 - 2\alpha^2\cdot 1\cdot 1 + 8\beta\cdot 0 + 8\alpha^2 = 0$$

vilket ger $6\alpha^2 = 2$, dvs $\alpha = \pm 1/\sqrt{3}$. Riktningarna blir de samma som angavs ovan. (Här har vi antagit att gränsvärdena α och β existerar.)

Svar. De fyra riktningarna är $\frac{1}{2}(\pm\sqrt{3}, \pm 1)$.

9. Låt kurvan $\mathcal{C}$ vara triangeln med hörn i punkterna $(3,4)$, $(-4,0)$, $(2,-3)$, och orienterad moturs. Beräkna
$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}.$$
(4 p)

Lösningsförslag. Vektorfältet
$$\mathbf{F} = (F_1, F_2) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$
uppfyller
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$
överallt där det är definierat, vilket är överallt utom i origo som ligger inuti triangeln. Vi kan inte dra slutsatsen att integralen runt den slutna kurvan $\mathcal{C}$ är noll, men vi kan använda Greens sats för att byta kurvan mot en annan enkel kurva kring origo, utan att ändra integralens värde. Vi kan välja enhetscirkeln $\mathcal{C}'$ ett varv runt origo moturs. Kurvan $\mathcal{C}'$ parametriseras av
$$(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t), \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$
Den sökta integralen är alltså
$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} &= \oint_{\mathcal{C}'} \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

Svar. $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = 2\pi.$