Institutionen för matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Bedömningskriterier till tentamen
Måndagen den 5 juni 2017

Allmänt gäller följande:

- För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.
- Om lösningen helt saknar förklarande text, eller motsvarande förklaring i form av logiska symboler, till beräkningar och formler ges högst två poäng. Detta markeras vid bedömningen med FTS (Förklarande text saknas).
- Om lösningen har förklarande text men inte tillräckligt för att det ska gå att förstå alla steg ges högst tre poäng sammanlagt på uppgiften. Detta markeras med FLFT (För lite förklarande text).
- Mindre räknefel ger i allmänhet inte avdrag om de inte ändrar uppgiftens karaktär eller leder till orimligheter som borde ha upptäckts.
- Lösningen ska kunna läsas av en person som inte är insatt i problemet i förväg. Bevisbördan ligger på den som skriver, inte på den som läser.

(1) En kulles höjd ges av $z = 60 - 0{,}02x^2 - 0{,}01y^2$ där enheten är meter på alla tre koordinataxlar.

(a) I vilken riktning i xy-planet ska vi röra oss för att komma ner snabbast om vi befinner oss i punkten $(50, 100, -90)$? **(2 p)**

(b) Hur snabbt ändras höjden i punkten $(50, 100, -90)$ om vi rör oss i riktningen enligt del (a) med farten 1 km/h sett uppifrån? **(2 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt beräkning av gradienten i punkten, **1 poäng**
- Korrekt motivering om riktning, **1 poäng**

(b)
- Korrekt beräkning av största riktningsderivatan, **1 poäng**
- Korrekt motiverad slutsats om förändringen i höjdled, **1 poäng**

(2) Bevisa formeln $V = \dfrac{4\pi a^3}{3}$ för volymen av ett klot med radie a genom att införa sfäriska koordinater i trippelintegralen

$$V = \iiint_K dV,$$

där klotet K ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$. **(4 p)**

Bedömning:
- Korrekt beskrivning av klotet i sfäriska koordinater, **1 poäng**
- Korrekt uppsställning av trippelintegralen, **1 poäng**
- Principiellt korrekt beräkning av trippelintegralen, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av trippelintegralen, **1 poäng**

(3) Avgör vilket av fälten

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(x(z-1), -yz, z - x^2\big)$$

och

$$\mathbf{G}(x, y, z) = \big(y^2 + (2x - y)z, x(2y - z), x(x - y)\big)$$

som är konservativt och bestäm en potential till detta. **(4 p)**

Bedömning:
- Korrekt beräkning av $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$, **1 poäng**
- Korrekt beräkning av $\mathbf{curl}\,\mathbf{G}$, **1 poäng**
- Korrekt motiverad slutsats om vilket av fälten som är konservativt, **1 poäng**
- Korrekt beräkning av potentialen, **1 poäng**

(4) Den elliptiska cylindern $9x^2 + 25y^2 = 225$ och planet $4y + 3z = 0$ skär varandra i en kurva $\mathcal{C}$.

(a) Ge en parametrisering av kurvan $\mathcal{C}$. **(2 p)**

(b) Beräkna längden av kurvan $\mathcal{C}$. **(2 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt parametrisering av x- och y-koordinaterna, **1 poäng**
- Korrrekt slutförd parametrisering av kurvan, **1 poäng**

(b)
- Korrekt formel för beräkning av kurvans längd, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av kurvans längd, **1 poäng**

(5) Låt $f(x, y) = x^2 + 2xy - 5y^2$ och $g(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$.

(a) Bestäm största och minsta värde för $f(x, y)$ givet att $g(x, y) = 10$ om dessa existerar. **(2 p)**

(b) Bestäm största och minsta värde för $g(x, y)$ givet att $f(x, y) = 10$ om dessa existerar. **(2 p)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt beräknat maximum, **1 poäng**
- Korrekt beräknat minimum, **1 poäng**

(b)
- Korrekt motivering till att maximum saknas, **1 poäng**
- Korrekt motivera minimum, **1 poäng**

(6) En snöboll i formen av ett klot centrerad i origo och med radie a belyses av solen som befinner sig långt bort på den positiva y-axeln. Bestäm den instrålande effekten

$$-\iint_S (0, -I, 0) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS,$$

där S är den del av klotets yta som uppfyller $y > 0$ och därmed är belyst av solen, I är solens intensitet, $\hat{\boldsymbol{n}}$ är ytans utåtpekande normal och dS är arealementet. **(4 p)**

Bedömning:
- Korrekt parametrisering av ytan, **1 poäng**
- Korrekt beräkning av integranden för flödesintegralen, **1 poäng**
- Korrekt påbörjad beräkning av dubbelintegralen, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av flödet, **1 poäng**

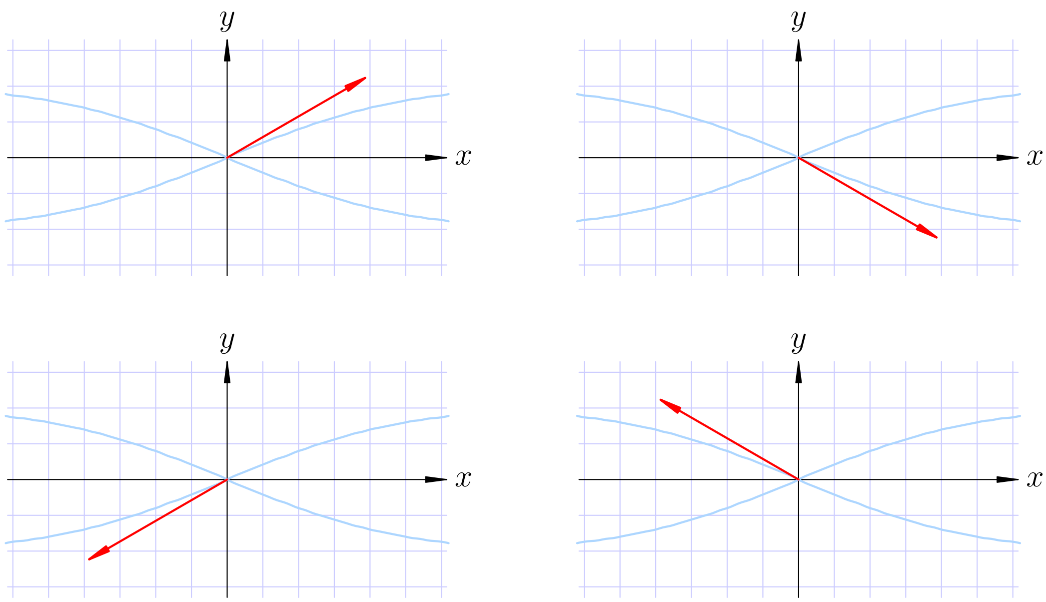
(7) Ett område som ligger på ena sidan om ett plant snitt genom en sfär kallas för en *sfärisk kalott*. Beräkna arean av den sfäriska kalott som ges av

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq h,$$

där a och h är konstanter med $0 < h < a$. **(4 p)**

Bedömning:
- Korrekt formel för beräkning av area, **1 poäng**
- Korrekt uppställd dubbelintegral, **1 poäng**
- Korrekt påbörjad beräkning av dubbelintegral, **1 poäng**
- Korrekt slutförd beräkning av arean, **1 poäng**

(8) I origo har kurvan $\cos(x + y) + \cos(x - y) + 4y^2 = 2$ en förgreningspunkt och består av fyra kurvstycken som möts där. Bestäm riktningsvektorn för respektive kurvstycke i origo.



Kurvan $\cos(x + y) + \cos(x - y) + 4y^2 = 2$ och de sökta riktningsvektorerna.

(4 p)

Bedömning: Lösning via implicit derivering:
- Korrekt derivering två gånger, **1 poäng**
- gränsövergång med två möjligheter för derivatan, **2 poäng**
- slutsats med fyra riktningsvektorer, **1 poäng**

Lösning via Maclaurinutveckling:
- Korrekt Maclaurinpolynom av grad två med restterm, **1 poäng**
- gränsövergång för de två fallen, **2 poäng**
- slutsats med fyra riktningsvektorer, **1 poäng**

(9) Låt kurvan $\mathcal{C}$ vara triangeln med hörn i punkterna $(3,4)$, $(-4,0)$, $(2,-3)$, och orienterad moturs. Beräkna

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{-y dx + x dy}{x^2+y^2}.$$

(4 p)

Bedömning:

- Att inse singularitet och att Greens formel inte kan användas direkt och att man ska skära en byt av området, **1 poäng**
- Korrekt uppställning genom att skära bort en skiva runt origo och användande av Greens sats för att övergå till cirkeln, **1 poäng**
- Beräkning av nya integralen över cirkeln och slut resonemang , **2 poäng**
- Parametrisering utan komplett lösning, **0 poäng**