KTH, Matematik
Maria Saprykina

Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 1)
19 dec 2016 kl. 08:00-13:00

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–28 poäng, B–24, C–21, D–17, E–14, Fx–13.
Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina (masha@kth.se).
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen "Mathematics Handbook" av Råde och Westergren.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1. Differentialekvationen $xy' - y = x^2$, $x > 0$, har en lösning som också uppfyller ekvationen $x^3y' - x^2y = y^2$, $x > 0$. Bestäm denna lösning.

2. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x > 0.$$

3. Betrakta systemet

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - 5x_2 \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

a) Bestäm en fundamentalmatris till systemet. **(2p)**
b) Lös systemet under begynnelsevillkoret $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$. **(1p)**
c) Är den kritiska punkten $(0, 0)$ stabil eller instabil? **(1p)**

4. Betrakta ekvationen $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$.
   a). Visa att denna ekvation har en reguljär singulär punkt i $x = 0$. **1p.**
   b). Bestäm indexekvationen (indicial equation) samt rekursionsrelationen. **2p.**
   c). Bestäm de tre första nollskilda termerna i serielösningen motsvarande den största roten av indexekvationen och $a_0 = 1$. **1p.**

5. Ett visst filter av typen

$$y_{ut}(t) = \int_0^t h(t-u)y_{in}(u)du,$$

där $h(t)$ är en viss funktion, transformerar insignalen $y_{in}(t) = \cos t$ till utsignalen $y_{ut}(t) = 1 - \cos t$. Beräkna $y_{ut}(t)$ om $y_{in}(t) = e^{-t}$.

Vänd!

6. I denna uppgift är a) och b) oberoende av varandra.
a) Betrakta det autonoma systemet **(2p)**

$$x' = 1 - y$$
$$y' = x^2 - y^2.$$

Bestäm samtliga kritiska punkter, samt avgör om de är stabila eller instabila.

b) Genom att skiva om ekvationen $x'' + 2x^3 = 0$ som ett första ordningens autonomt system, använd lämplig metod för att avgöra om den kritiska punkten $(0, 0)$ är stabil eller instabil. **(2p)**

7. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Fullständig motivering krävs! Varje korrekt delsvar ger 1p.

a). Om $\sin x$ är en lösning till ekvationen

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

där a och b är reella konstanter, så är $\sin x + \cos x$ också en lösning.

b). Låt $f(t)$ och $g(t)$ vara kontinuerliga funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$, och g inte är identiskt lika med 0. Om $y_1(t)$ och $y_2(t)$ är lösningar till ekvationen

$$y'(t) = f(t)y(t) + g(t),$$

så även $y_1(t) + 2y_2(t)$ är en lösning till samma ekvation.

c). Laplace-transformen av funktionen $f(t) = ae^{2t} + be^{t^2}$ är definierad för alla reella a och b.

d). Låt $f(t)$ och $g(t)$ vara kontinuerliga funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Funktionen $y(t) = t^3$ kan inte vara lösning till ekvationen

$$y''(t) + f(t)y'(t) + g(t)y(t) = 0.$$

8. Låt y_1, y_2 vara två linjärt oberoende lösningar till ekvationen

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \quad x \in I. \tag{1}$$

a) Visa att **(3p)**

$$P(x) = -\frac{y_1 y_2'' - y_2 y_1''}{W(y_1, y_2)}$$
$$Q(x) = \frac{y_1' y_2'' - y_2' y_1''}{W(y_1, y_2)}$$

där $W(y_1, y_2)$ är Wronskideterminanten av y_1 och y_2.
b) Bestäm en ekvation på formen (1) som har $y_1 = x$ och $y_2 = x^3$ som lösningar då $x > 0$. **(1p)**

Lycka till!