KTH, Matematik

Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 2)
10 januari 2017 kl. 14:00-19:00

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–28 poäng, B–24, C–21, D–17, E–14, Fx–13.
Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina (masha@kth.se).
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen "Mathematics Handbook" av Råde och Westergren.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1. Bestäm konstanterna a, b så att integralen

$$\int_{-1}^{1} |a + bx - e^{-x}|^2 dx$$

blir så liten som möjligt.

2. Antag att $a_0 = 2$, $a_1 = 7$, och för $n = 0, 1, 2, \ldots$ gäller:

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0.$$

Bestäm formeln för a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

3. a) Bevisa från definition att derivatan av Heavisides funktion (i distributionsmening) är lika med Diracs delta-funktion: $H'(x) = \delta(x)$.

b). Låt $f(x) = |2 - x^2|$. Bestäm $f'(x)$ och $f''(x)$ i distributionsmening. Förenkla ditt svar så långt som möjligt.

4. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$$

med hjälp av Plancherels formel.

5. Lös problemet

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_t, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) &= 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 1 + \cos 3x, \quad 0 < x < \pi. \end{aligned}$$

Vänd!

6. Visa att $K_n(t) = \frac{1}{2}ne^{-n|t|}$, $n = 1, 2, \ldots$, definierar en positiv summationskärna. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n|t|} \cos(1-t)dt.$$

7. Betrakta problemet

$$\begin{aligned} &u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ &u(0) = u(\pi) + u'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Finn ett fullständigt ortogonalt system av lösningar till detta problem i rummet $L^2([0, \pi])$ med avseende på standard inre-produkten i detta rum.

8. a). För en funktion $f \in L^2(\mathbb{T})$, låt $c_n(f)$ beteckna f:s (komplexa) Fourierkoefficienter. Antag att $f \in C^2(\mathbb{T})$ (dvs f är 2π-periodisk och två gånger kontinuerligt deriverbar).

Uttryck $c_n(f')$ och $c_n(f'')$ genom n och $c_n(f)$ (motivera noga!).

Visa att det finns en konstant $M > 0$ sådan att

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^2} \quad \text{för alla } n \neq 0.$$

b). Använd Fourierseriemetoden för att bestämma alla 2π-periodiska, 4 gånger kontinuerligt deriverbara lösningar till ekvationen

$$y''(t) + 4y(t + \pi) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lycka till!