KTH, Matematik

Tentamen, SF1629, Differentialekvationer och Transformer II (del 2)
11 april 2017 kl. 8:00-13:00

Tentamen består av åtta uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–28 poäng, B–24, C–21, D–17, E–14, Fx–13.
Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina (masha@kth.se).
Hjälpmedel: Det enda hjälpmedlet vid tentamen är formelsamlingen "Mathematics Handbook" av Råde och Westergren.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1 a). Använd definitionen för att beräkna Z-transformen $A(z)$ av följden (a_n) där $a_n = 2$ för alla $n = 0, 1, 2, \ldots$. För vilka z konvergerar $A(z)$? 1p.
b). Bestäm en talföljd (a_n) sådan att $a_0 = 0$ and 3p.

$$a_{n+1} - 3a_n = 1 + (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

2. Bestäm ett polynom $p(x)$ av grad 2 som minimerar värdet av

$$\int_{-1}^{1} |\cos(\pi x/2) - p(x)|^2 dx.$$

3. Beräkna f' and f'' i distributionsmening då

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi/2 \le x \le \pi/2, \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

4. Antag att funktionen $f(t)$ har Fouriertransformen $\widehat{f}(\omega)$. Vilken funktion g ska man falta f med for att få

$$\widehat{f * g}(\omega) = \begin{cases} \widehat{f}(\omega), & -3 \le \omega \le 3, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

5. Bestäm lösningen $u(x,t)$ till

$$\begin{aligned} &u_{xx} = u_t - 3u, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ &u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0,\ t > 0; \\ &u(x,0) = f(x),\ 0 < x < \pi \end{aligned}$$

där $f(x) = \sin x + 2\sin 3x$. Motivera alla steg!

Vänd!

6. Låt $f(x)$ vara en kontinuerlig funktion på intervallet $[0, \pi]$, och

$$\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx = 0 \text{ för alla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Visa att $f(x) = 0$ för alla $x \in [0, \pi]$ genom att uttnyttja det faktum att mängden $\{\cos nx, n \geq 0;\ \sin nx, n \geq 1\}$ är ett fullständigt ortogonalt system i $L^2(\mathbb{T})$. Motivera alla steg!

7. a). Låt $V = L^2(\mathbb{T})$, $D_A = V \cap C^2(\mathbb{T})$, och låt operatorn A vara definierad av formeln

$$Au = u'' \text{ för alla } u \in D_A.$$

Visa att A är symmetrisk. 2p.

b). Visa att alla egenvärden till en symmetrisk operator på ett inre produktrum är reella, och att egenvektorer som motsvarar olika egenvärden är ortogonala. 2p.

8. a). För vilka reella positiva värden på a är summan $\sum_{k=1}^{\infty} a^k$ konvergent i Cesaros $(C, 1)$ mening? För dessa a beräkna 2p.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k \quad (C, 1).$$

b). Vilken eller vilka av följande formler definierar en tempererad distribution: 2p.

$$T_1[\phi] = \phi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} |1 - x^2|\phi'(x)dx;$$

$$T_2[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\phi(x)dx.$$

Motivera ditt svar!

Lycka till!