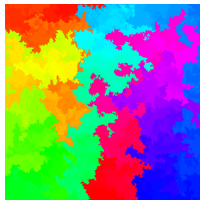
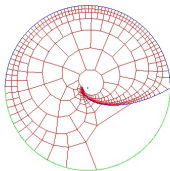


Konforma avbildningar: kartritning till modern fysik

Fredrik Viklund

KTH Matematik



Introduktionskurs i matematik, augusti 2016

Konforma avbildningar

Föredraget handlar om **vinkelbevarande** avbildningar från några olika perspektiv.

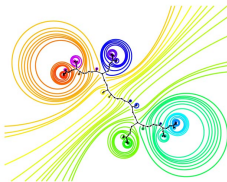
Nedslag i **problem** (och lösningar), **tillämpningar** och **teori**.

Konforma avbildningar

Föredraget handlar om **vinkelbevarande** avbildningar från några olika perspektiv.

Nedslag i **problem** (och lösningar), **tillämpningar** och **teori**.

- Kartprojektioner (och longitudproblemet)
- Riemanns avbildningssats
- Konform invarians i modern fysik



Nästan alla bilder är lånade! Almost all figures are borrowed!

Kartprojektioner

Problem 1: hur representerar man jorden (en sfär) på en karta (ett plan)?

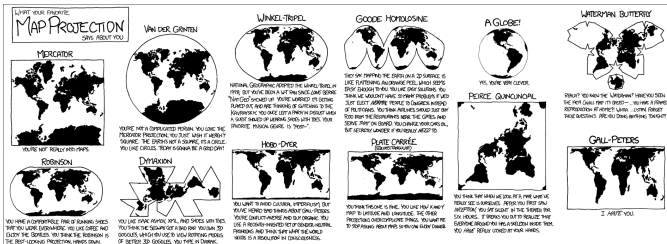
Vi behöver en **projektion**, dvs ett sätt att till varje punkt på sfären tillordna precis en punkt på "kartan".

Kartprojektionen

Problem 1: hur representerar man jorden (en sfär) på en karta (ett plan)?

Vi behöver en **projektion**, dvs ett sätt att till varje punkt på sfären tillordna precis en punkt på "kartan".

Många alternativ. Historiskt bra för navigation om **vinklar bevaras** i avbildningen. Varför? **Kompassen!** Man vill kunna plotta kurser. Att areor bevaras är inte lika viktigt.

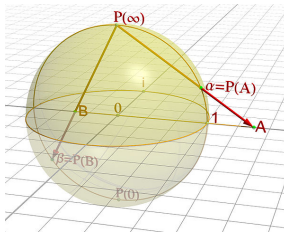


Kartprojektioner

Ex.1. Den **stereografiska** projektionen har varit känd sedan antiken.

Kartprojektioner

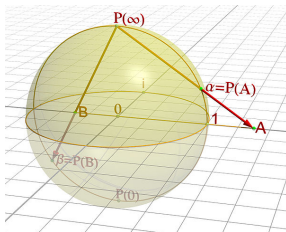
Ex.1. Den **stereografiska** projektionen har varit känd sedan antiken.



- Projicera på planet som skär sfären i ekvatorn.

Kartprojektioner

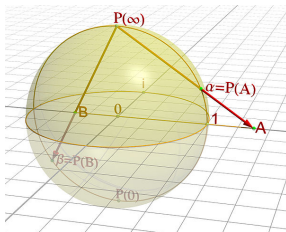
Ex.1. Den **stereografiska** projektionen har varit känd sedan antiken.



- Projicera på planet som skär sfären i ekvatorn.
- Låt P vara en punkt på sfären. Dra en linje L genom P och nordpolen N .

Kartprojektioner

Ex.1. Den **stereografiska** projektionen har varit känd sedan antiken.



- Projicera på planet som skär sfären i ekvatorn.
- Låt P vara en punkt på sfären. Dra en linje L genom P och nordpolen N .
- L skär planet (kartan) i en punkt som blir **projektionen** $\pi(P)$.
- Sfären minus nordpolen avbildas på hela planet. Södra halvklotet avbildas på enhetsskivan.

Kartprojektioner

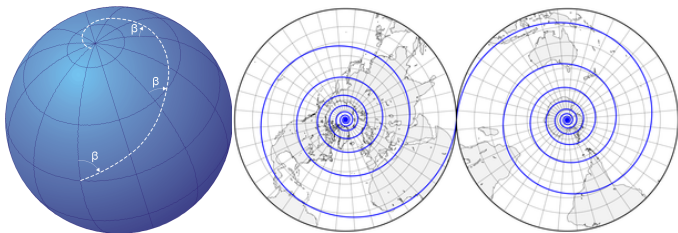
Egenskaper:

- Vinklar bevaras, dvs konform avbildning. Bra!
- Cirklar med konstant latitud (N/S position) respektive longitud (Ö/V position) avbildas på koncentrisk cirklar och på radier.

Kartprojektioner

Egenskaper:

- Vinklar bevaras, dvs konform avbildning. Bra!
 - Cirklar med konstant latitud (N/S position) respektive longitud (Ö/V position) avbildas på koncentrisk cirklar och på radier.
- Segla med konstant kompassriktning = längs "loxodrom". Avbildas *inte* på rätta linjer. Opraktiskt att plotta kurs, dåligt!



Kartprojektioner

Ett bonusproblem: **longitudproblemet**

Lätt att på öppet hav bestämma **latitud** (nord-sydlig position).

- Lösning: mät solens höjd över horisonten med **sextant**. Tabell ger latituden.

Kartprojektioner

Ett bonusproblem: **longitudproblemet**

Lätt att på öppet hav bestämma **latitud** (nord-sydlig position).

- Lösning: mät solens höjd över horisonten med **sextant**. Tabell ger latituden.

Men det är **svårt** att bestämma **longitud** (öst-västlig position).
Viktigt problem på 1500-1700-talet.

Kartprojektioner

Ett bonusproblem: **longitudproblemet**

Lätt att på öppet hav bestämma **latitud** (nord-sydlig position).

- Lösning: mät solens höjd över horisonten med **sextant**. Tabell ger latituden.

Men det är **svårt** att bestämma **longitud** (öst-västlig position).
Viktigt problem på 1500-1700-talet.

- Lösning: **kronometer**, 1760-talet. Jorden roterar med konstant hastighet. Jämför lokal tid (titta på solen) med tiden hemma (klockan).



Kartprojektioner

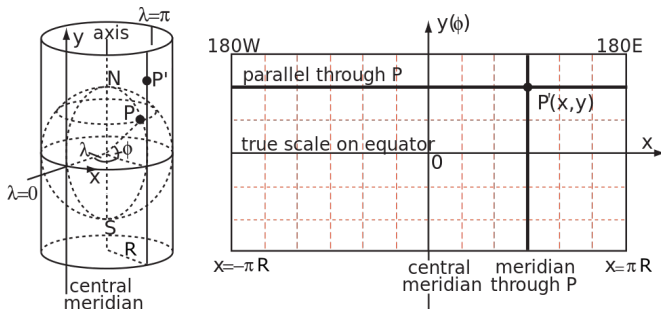
Ex. 2. Mercator-projektionen (1569):

- Placera sfären i en cylinder så att de tangerar varandra i ekvatorn.

Kartprojektioner

Ex. 2. Mercator-projektionen (1569):

- Placera sfären i en **cylinder** så att de tangerar varandra i ekvatorn.
- Låt $P = (\phi, \lambda)$ vara en punkt på sfären och $\pi_M(P) = (x, y)$ dess projektion. Välj $x = \lambda$, dvs enligt vilken **longitud** P ligger på.



- Hur välja $y = y(\phi)$? Vi vill att **loxodromer** avbildas **på linjer**! Följer automatiskt om avbildningen är konform. (Cirklar genom polerna avbildas på parallella linjer.)

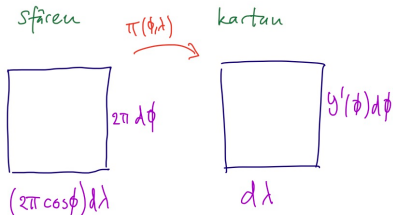
Kartprojektioner

- Hur välja $y = y(\phi)$? Vi vill att **loxodromer** avbildas **på linjer**! Följer automatiskt om avbildningen är konform. (Cirklar genom polerna avbildas på parallella linjer.)
- Varje cirkel med **konstant latitud** ϕ är en cirkel med radie $\cos \phi$, så har omkrets $2\pi \cos \phi$, och avbildas på kartan på en **linje** av längd 2π , så har **skalats** med en faktor

$$\frac{1}{\cos \phi} = \sec \phi.$$

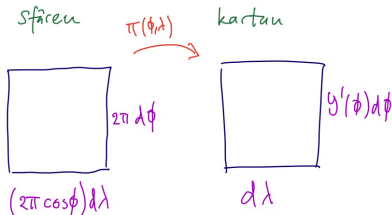
Kartprojektioner

- Jämför infinitesimala rektanglar på sfären och kartan:



Kartprojektioner

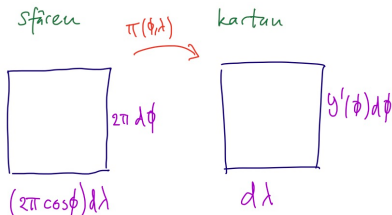
- Jämför infinitesimala rektanglar på sfären och kartan:



$$\frac{d\phi}{\cos \phi d\lambda} \stackrel{\text{vill}}{=} \frac{y'(\phi) d\phi}{d\lambda}$$

Kartprojektioner

- Jämför infinitesimala rektanglar på sfären och kartan:

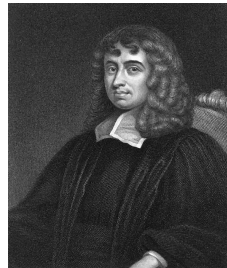
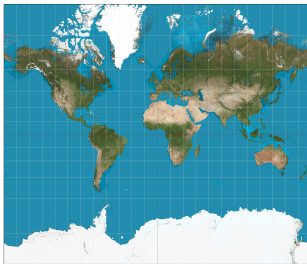


$$\frac{d\phi}{\cos \phi d\lambda} \stackrel{\text{vill}}{=} \frac{y'(\phi) d\phi}{d\lambda}$$

- Vi får att vi borde välja

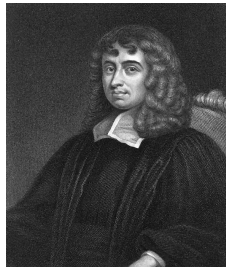
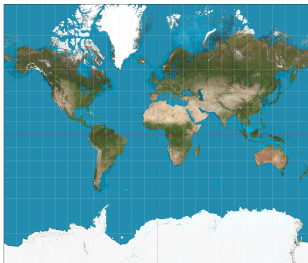
$$y'(\phi) = \frac{1}{\cos \phi}; \quad y(\phi) = \int_0^\phi \sec \phi \, d\phi = \log \left(\tan \left[\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \right).$$

Kartprojektioner



Resultat: Mercatorprojektionen är **konform** och **avbildar loxodromer på rätta linjer!**

Kartprojektioner



Resultat: Mercatorprojektionen är **konform** och **avbildar loxodromer på rätta linjer!**

OBS: **svårt** att beräkna **sekant-integralen**. Viktigt forskningsproblem på den tiden. Slutet av 1500-talet numeriskt, Barrow bevisade formeln på sent 1600-tal.

Stor areadistortion vid polerna: om vi tar $\phi = \pi/2 - \epsilon$:

$$\begin{aligned} y(\phi) &= \log \left(\tan \left[\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \right) = \log \left(\tan \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2} \right] \right) \\ &\approx \log \frac{2}{\epsilon}. \end{aligned}$$

Riemanns avbildningssats

Dessa var tidiga exempel på **konforma avbildningar**.

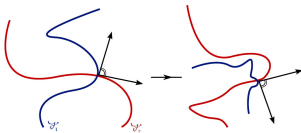
Ett mer **modernt perspektiv**, leder till oväntade tillämpningar.

Låt oss titta på konforma avbildningar av (delmängder till)

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^2.$$

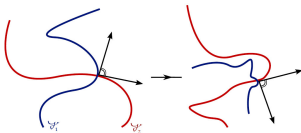
Riemanns avbildningssats

- f är **konform** i z om följande gäller: om två kurvor möts i z och bildar vinkel α , så möts bilderna av kurvorna i $f(z)$ och bildar även där vinkeln α .



Riemanns avbildningssats

- f är **konform** i z om följande gäller: om **två** **kurvor** **möts** i z och bildar vinkel α , så möts **bilderna av kurvorna** i $f(z)$ och bildar även där vinkeln α .



- Precis definition: f är **konform** i z om gränsvärdet

$$\lim_{r \rightarrow 0+} e^{-i\theta} \frac{f(z + re^{i\theta}) - f(z)}{|f(z + re^{i\theta}) - f(z)|}$$

existerar och är **oberoende** av θ .

- Givet en **öppen mängd** $\Omega \subset \mathbb{C}$, sägs $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ vara en **konform avbildning** av Ω om f är konform i varje punkt i Ω .

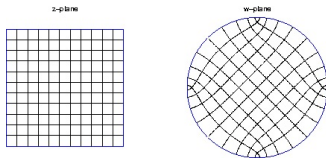
Riemanns avbildningssats

Vi är intresserade av **bijektioner** $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$.

Vi har då en geometrisk **korrespondens**

$$z \longleftrightarrow f(z), \quad \Omega \longleftrightarrow f(\Omega)$$

Tänk att f tar en "form" Ω och avbildar den så att insidan avbildas konformt på insidan av $f(\Omega)$.



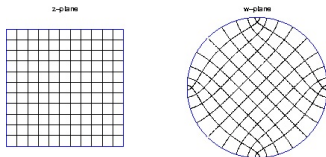
Riemanns avbildningssats

Vi är intresserade av **bijektioner** $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$.

Vi har då en geometrisk **korrespondens**

$$z \longleftrightarrow f(z), \quad \Omega \longleftrightarrow f(\Omega)$$

Tänk att f tar en "form" Ω och avbildar den så att insidan avbildas konformt på insidan av $f(\Omega)$.



Finns det "**många**" konforma avbildningar?

Riemanns avbildningssats

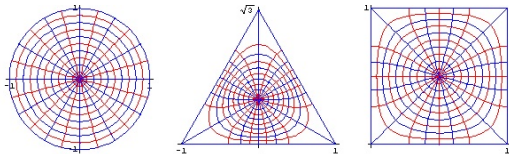
Riemanns avbildningssats (Riemann, 1851. Bevis av Caratheodory 1912.)

Till **varje** Ω "utan hål" (kallas enkelt sammanhängande) så finns en **konform bijektion** från Ω till enhetsskivan $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

Riemanns avbildningssats

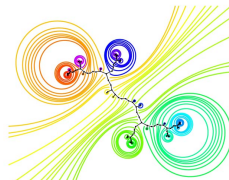
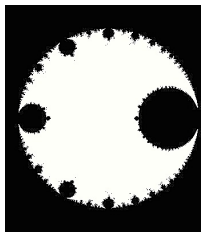
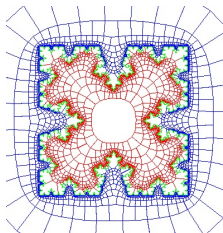
Riemanns avbildningssats (Riemann, 1851. Bevis av Caratheodory 1912.)

Till **varje** Ω "utan hål" (kallas enkelt sammanhängande) så finns en **konform bijektion** från Ω till enhetsskivan $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.



Riemanns avbildningssats

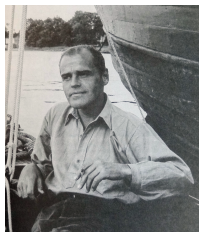
Enkelt sammanhängande områden kan ha väldigt **komplex geometri**.



Riemanns avbildningssats

Via avbildningssatsen kan man relatera **geometrin** hos Ω till **analytiska egenskaper** hos f_Ω . **Geometrisk funktionsteori**, gren inom komplexanalys.

Fundamentala bidrag från Sverige: **Arne Beurling** (Uppsala, Princeton) och **Lennart Carleson** (Uppsala, Mittag-Leffler, KTH).



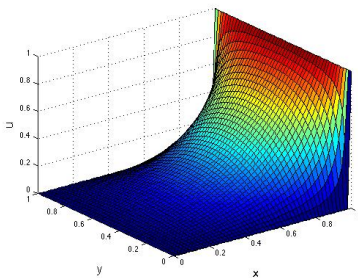
Konform invarians i matematisk fysik

Betrakta följande problem:

Konform invarians i matematisk fysik

Betrakta följande problem:

Ω är en enkelt sammanhängande, tunn metallbit, isolerad från omgivningen. Temperaturen på randen hålls konstant $g(x)$, $x \in \partial\Omega$. Vad är temperaturen $u(z)$, $z \in \Omega$, efter lång tid?



Konform invarians i matematisk fysik

Lösning (Fourier, 1807): ställ upp en viss **differentialekvation**.
Ganska enkel att lösa för en kvadrat, t.ex. Men svårare om Ω har
komplicerad geometri.

Konform invarians i matematisk fysik

Lösning (Fourier, 1807): ställ upp en viss **differentialekvation**.
Ganska enkel att lösa för en kvadrat, t.ex. Men svårare om Ω har **komplikerad geometri**.

Men (~ 1900), det visar sig att lösningen är **konformt invariant**.

Konform invarians i matematisk fysik

Lösning (Fourier, 1807): ställ upp en viss **differentialekvation**.
Ganska enkel att lösa för en kvadrat, t.ex. Men svårare om Ω har **komplicerad geometri**.

Men (~ 1900), det visar sig att lösningen är **konformt invariant**.

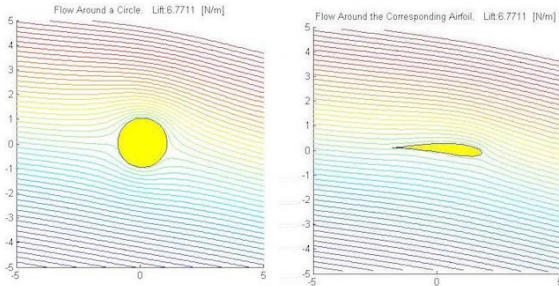
Om $v(w)$ löser problemet i ett annat område, en **kvadrat** S säg, och $f : \Omega \rightarrow S$ är en konform bijektion (**Riemann!**) så kan man få u från v :

$$u(z) = v(f(z)).$$

Om man kan hitta f så är det **tillräckligt** att lösa problemet i den enkla geometrin. Både praktisk och teoretisk signifikans.

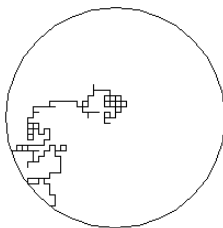
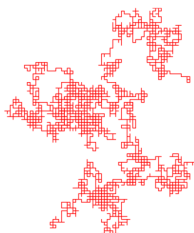
Konform invarians i matematisk fysik

Det finns **många liknande** problem med denna egenskap.
Tillämpningar i **fysik**, **elektrostatik**, **strömningsmekanik**, osv.

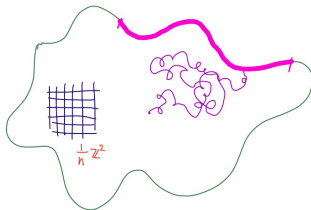


Konform invarians av slumpfenomen

Ex 1: **Slumpvandring** på $\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z}\}$. Starta från 0 och hoppa i varje steg till en granne med sannolikhet $1/4$.

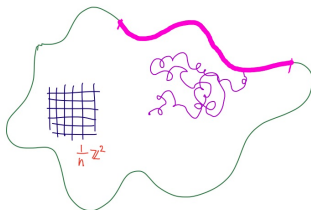


Konform invarians av slumpfenomen



"Lägg på" ett område. Starta en slumpvandring från 0. Om vi markerar en del av randen kan vi fråga: vad är sannolikheten att slumpvandringen först träffar randen i den markerade delen?

Konform invarians av slumpfenomenen



"Lägg på" ett område. Starta en slumpvandring från 0. Om vi markerar en del av randen kan vi fråga: vad är sannolikheten att slumpvandringen först träffar randen i den markerade delen?

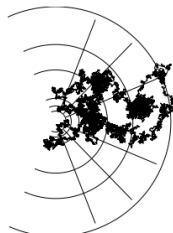
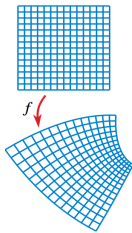
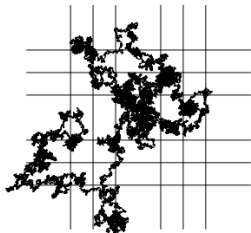
Om vi låter rutnätets storlek bli mindre och mindre, men håller området fixt, så konvergerar sannolikheten mot en **konformt invariant funktion**. (Faktiskt samma som vi såg i värme-exemplet, med randvärde 0/1!)

Konform invarians av slumpfenomen

Faktum är att hela slumpvandringen som sådan konvergerar, mot s.k. **Brownsk rörelse**.

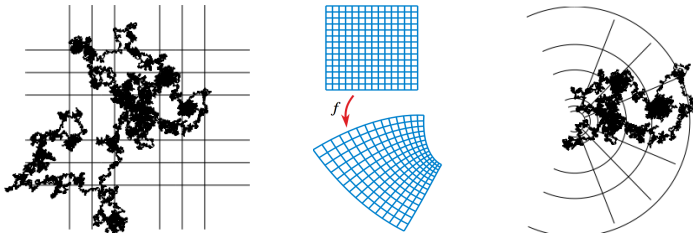
Konform invarians av slumpfenomenen

Faktum är att hela slumpvandringen som sådan konvergerar, mot s.k. **Brownsk rörelse**.



Konform invarians av slumpfenomen

Faktum är att hela slumpvandringen som sådan konvergerar, mot s.k. **Brownsk rörelse**.



Brownsk rörelse har en **konformt invariant** "bana" i **statistisk mening**.

Konform invarians av slumpfenomen

Brownsk rörelse "upptäcktes" av botanikern Brown på 1800-talet, då han ville beskriva hur pollenkorn rör sig på en stilla vattenyta. Einstein, mfl. Mycket viktig i teori och tillämpningar.

Konform invarians av slumpfenomen

Ex 2: Tag ett område Ω . Vi utför ett "slumpexperiment".

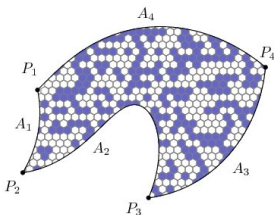
Konform invarians av slumpfenomen

Ex 2: Tag ett område Ω . Vi utför ett "slumpexperiment".

Perkolation. (Poröst medium.) Täck området med små "celler".

Singla en slant för varje cell, vit/lila.

- Vad är chansen att man kan vandra från vänstra sidan till högra på enbart vita celler?

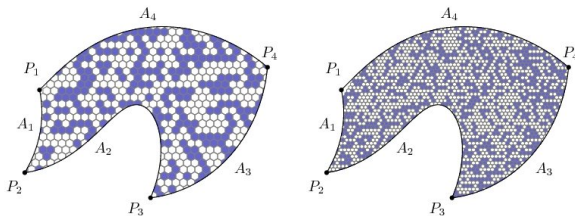


Konform invarians av slumpfenomenen

Ex 2: Tag ett område Ω . Vi utför ett "slumpexperiment".

Perkolation. (Poröst medium.) Täck området med små "celler".
Singla en slant för varje cell, vit/lila.

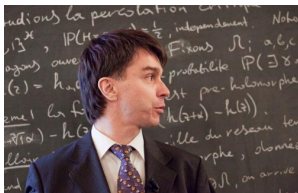
- Vad är chansen att man kan vandra från vänstra sidan till högra på enbart vita celler?



Konform invarians av slumpfenomen

När cellernas storlek blir mindre och mindre (men området hålls fixt), **konvergerar** sannolikheten att det finns en vit passage mot en explicit **konformt invariant funktion**.

Oxford-fysikern Cardy förmodade på 90-talet. Bevis: Smirnov, KTH, 2001.

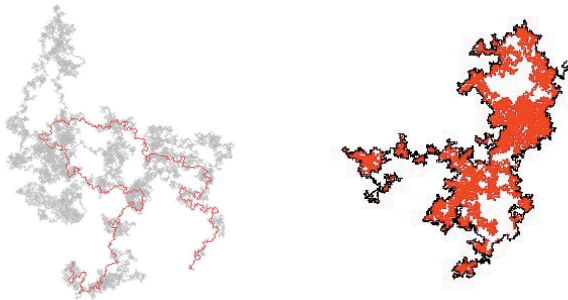


Resultatet har långtgående implikationer. **Konform fältteori** inom teoretisk fysik. Gör att vi kan studera **fraktalgeometrin** hos dessa slumpprocesser.

Konform invarians av slumpfenomen

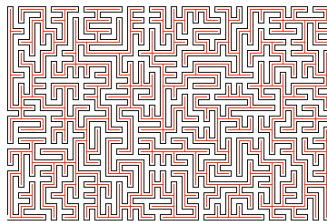
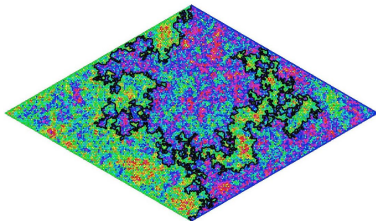
Flera **liknande modeller** har även dem konformt invarianta skalgränser...några bilder.

Loop-erased walk, ytterhöljet av en slumpvandring...



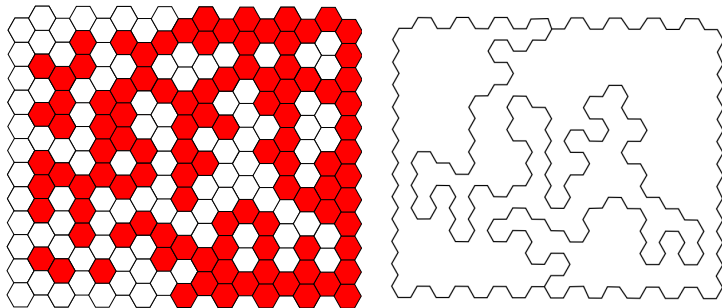
Konform invarians av slumpfenomen

Gaussiskt fritt fält, likformigt uppspännande träd...



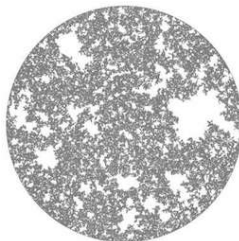
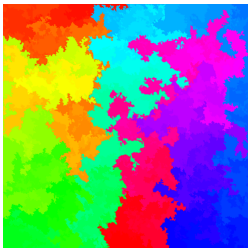
Konform invarians av slumpfenomen

Perkolation...



Konform invarians av slumpfenomen

SLE-processer...



Konform invarians av slumpfenomen

Mycket aktivt samtida forskningsområde...

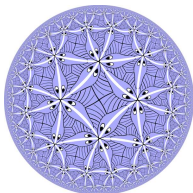
Blandar sannolikheteori med analys, kombinatorik, geometri...

Konform invarians av slumpfenomen

Mycket aktivt samtida forskningsområde...

Blandar sannolikhetsteori med analys, kombinatorik, geometri...

Sammanfattningsvis: konforma avbildningar dyker upp på många ställen i matematik, fysik, mm. Om man vill lära sig mer: läs komplex analys!



Tack!