KTH Teknikvetenskap

Lösningsförslag till tentamen

Variant Adams Calculus

SF0003 Introduktion i matematik
Augusti 2017

1. Lös ekvationen $|2 - x| = 1$.

   Lösningsförslag: Ekvationen $|2 - x| = 1$ är uppfylld om $2 - x = 1$ eller $2 - x = -1$. I första fallet är $x = 1$ och i det andra är $x = 3$, vilket alltså är lösningarna till ekvationen.

2. Beskriv det område i planet som ges av olikheten $x^2 + (y + 2)^2 \leq 9$.

   Lösningsförslag: Området består av alla punkter på och innanför cirkeln med medelpunkt $(x, y) = (0, -2)$ och radie $r = 3$.

3. Om $f(x) = \sqrt{x+1}$ och $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, bestäm $g \circ f(x) = g(f(x))$ och $f \circ g(x) = f(g(x))$.

   Lösningsförslag: Vi har

$$
\begin{aligned}
g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) &= \frac{1}{\sqrt{x+1} - 1} \\
&= \frac{\sqrt{x+1} + 1}{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{\sqrt{x+1} + 1}{(x+1) - 1} = \frac{\sqrt{x+1} + 1}{x},
\end{aligned}
$$

   och

$$
\begin{aligned}
f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) &= \sqrt{\frac{1}{x-1} + 1} \\
&= \sqrt{\frac{1 + (x-1)}{x-1}} = \sqrt{\frac{x}{x-1}}.
\end{aligned}
$$

4. För vilka x är funktionen $f(x) = \dfrac{x+3}{3x^2 - 8x - 3}$ definierad?

   Lösningsförslag: Funktionen är definierad så länge vi inte delar med noll. Ekvationen $3x^2 - 8x - 3 = 0$ har lösningarna $x = 3$ och $x = -1/3$, så funktionen är definierad för alla x förutom $x = 3$ och $x = -1/3$.

5. Uttryck $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ i termer av $\sin x$ och $\cos x$.

   Lösningsförslag: Additionsformeln för sin ger

$$\begin{aligned}\sin(\pi/6 - x) &= \sin(\pi/6)\cos(-x) + \cos(\pi/6)\sin(-x)\\ &= \sin(\pi/6)\cos(x) - \cos(\pi/6)\sin(x).\end{aligned}$$

   Eftersom $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ och $\sin(\pi/6) = 1/2$ ger detta

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x).$$

6. Uttryck de båda komplexa talen $z = 2 + 2i$ och $w = -3 + 3i$ på polär form, det vill säga termer av deras belopp och argument. Använd dessa uttryck för att beräkna zw och z/w. Ange svaren på formen $a + bi$.

   Lösningsförslag: Vi har

$$|z| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}, \qquad \arg(z) = \pi/4$$

   och

$$|w| = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = 3\sqrt{2}, \qquad \arg(w) = 3\pi/4.$$

   För produkten zw har vi

$$|zw| = |z| \cdot |w| = 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 12$$

   och

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) = \pi/4 + 3\pi/4 = \pi,$$

   vilket betyder att

$$zw = 12(\cos(\pi) + \sin(\pi)i) = 12(-1 + 0i) = -12.$$

   För produkten zw har vi

$$|z/w| = |z|/|w| = 2\sqrt{2}/3\sqrt{2} = 2/3,$$

   och

$$\arg(z/w) = \arg(z) - \arg(w) = \pi/4 - 3\pi/4 = -\pi/2,$$

   vilket betyder att

$$z/w = \frac{2}{3}(\cos(-\pi/2) + \sin(-\pi/2)i) = \frac{2}{3}(0 + (-1)i) = -\frac{2}{3}\,i.$$