

Lösningförslag till tentamen

Variant Förberedande kurs i matematik

SF0003 Introduktion i matematik

Augusti 2017

1. Förenkla $\frac{\frac{7}{16} - \frac{5}{8}}{\frac{7}{10} - \frac{3}{5}}$ genom att skriva på gemensamt bråkstreck. Resultatet ska vara färdigförkortat.

Lösningförslag: Vi har

$$\begin{aligned} \frac{\frac{7}{16} - \frac{5}{8}}{\frac{7}{10} - \frac{3}{5}} &= \frac{16}{16} \cdot \frac{\frac{7}{16} - \frac{5}{8}}{\frac{7}{10} - \frac{3}{5}} = \frac{7 - 10}{16(\frac{7}{10} - \frac{3}{5})} \\ &= \frac{10}{10} \cdot \frac{-3}{16(\frac{7}{10} - \frac{3}{5})} = \frac{-30}{16(7 - 6)} = -\frac{15}{8}. \end{aligned}$$

2. Förenkla $\frac{2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x^2 + 2x}$ så långt som möjligt.

Lösningförslag: Vi har $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ och $x^2 + 2x = x(x + 2)$, så minsta gemensamma nämnare är $x(x + 2)(x - 2)$. Detta ger

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x^2 + 2x} &= \frac{2}{(x + 2)(x - 2)} - \frac{1}{x(x + 2)} \\ &= \frac{2x}{x(x + 2)(x - 2)} - \frac{x - 2}{x(x + 2)(x - 2)} \\ &= \frac{2x - (x - 2)}{x(x + 2)(x - 2)} \\ &= \frac{x + 2}{x(x + 2)(x - 2)} \\ &= \frac{1}{x(x - 2)}. \end{aligned}$$

3. Bestäm en andragradsekvation på formen $ax^2 + bx + c = 0$ som har rötterna $3 + \sqrt{7}$ och $3 - \sqrt{7}$.

Lösningförslag: En sådan ekvation är $(x - (3 + \sqrt{7}))(x - (3 - \sqrt{7})) = 0$. För att få den på sökta formen multiplicerar vi ihop och använder konjugatregeln,

$$\begin{aligned} 0 &= (x - (3 + \sqrt{7}))(x - (3 - \sqrt{7})) \\ &= ((x - 3) - \sqrt{7})((x - 3) + \sqrt{7}) \\ &= (x - 3)^2 - (\sqrt{7})^2 \\ &= x^2 - 6x + 9 - 7 \\ &= x^2 - 6x + 2. \end{aligned}$$

4. Lös ekvationen $e^{x^2+2x} = 1$.

Lösningsförslag: Ekvationen $e^{x^2+2x} = 1$ är uppfylld precis då $x^2 + 2x = 0$. Denna ekvation har lösningarna $x = 0$ och $x = -2$.

5. Bestäm medelpunkt och radie för den cirkel som ges av ekvationen $x^2 + 6x + y^2 - 4y = -4$.

Lösningsförslag: Vi kvadratkompletterar och får

$$\begin{aligned} -4 &= x^2 + 6x + y^2 - 4y \\ &= x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 - 4y + 4 - 4 \\ &= (x + 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4, \end{aligned}$$

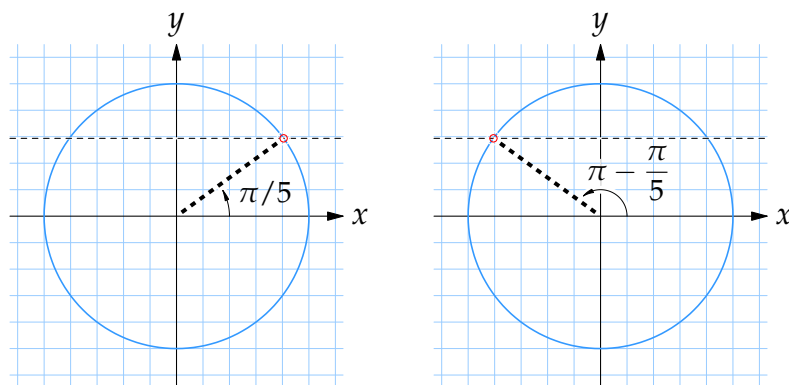
eller

$$9 = (x + 3)^2 + (y - 2)^2.$$

Detta är ekvationen för en cirkel med medelpunkt $(x, y) = (-3, 2)$ och radie $r = 3$.

6. Lös ekvationen $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$.

Lösningsförslag: Vi ser direkt att $x = \pi/5$ är en lösning till ekvationen, och med enhetscirkeln kan vi också dra slutsatsen att $x = \pi - \pi/5 = 4\pi/5$ är den enda ytterligare lösningen mellan 0 och 2π .



Samtliga lösningar till ekvationen får vi när vi adderar heltalsmultipler av 2π ,

$$x = \frac{\pi}{5} + 2n\pi \quad \text{och} \quad x = \frac{4\pi}{5} + 2n\pi,$$

där n är ett godtyckligt heltal.