KTH Teknikvetenskap

Lösningsförslag till tentamen

Variant Matematik för ekonomer

SF0003 Introduktion i matematik
Fredagen den 25 augusti 2017

1. Faktorisera uttrycket $a^4 - a^2 b$.

   Lösningsförslag: Genom att skriva a^4 som $a^{2+2} = a^2 \cdot a^2$ ser vi att båda termerna har a^2 som gemensam faktor och den kan brytas ut,

   $$a^4 - a^2 b = a^2 a^2 - a^2 b = a^2(a^2 - b).$$

   Detta uttryck kan inte faktoriseras ytterligare.

   Svar: $a^2(a^2 - b)$

2. Bestäm alla värden på x som uppfyller olikheten $5x - 4 > x + 4$.

   Lösningsförslag: Vi börjar med att samla alla x-termer i vänsterledet genom att subtrahera x från båda led,

   $$\begin{aligned} 5x - 4 - x &> x + 4 - x, \\ 4x - 4 &> 4. \end{aligned}$$

   Dela därefter båda med 4,

   $$x - 1 > 1.$$

   Addera slutligen 1 till båda led,

   $$\begin{aligned} x - 1 + 1 &> 1 + 1 \\ x &> 2. \end{aligned}$$

   Svar: $x > 2$

3. Lös ekvationen $x^2 - 5x + 4 = 0$.

   Lösningsförslag: Först kvadratkompletterar vi vänsterledet,

   $$\begin{aligned} x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ \left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{5}{2}\right)^2 + 4 &= 0 \end{aligned}$$

och flyttar över konstanttermerna till högerledet

$$\left(x-\tfrac{5}{2}\right)^2=\left(\tfrac{5}{2}\right)^2-4.$$

Högerledet förenklar vi genom att skriva det på gemensamt bråkstreck

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2-4=\frac{25}{4}-4=\frac{25}{4}-\frac{16}{4}=\frac{25-16}{4}=\frac{9}{4}.$$

Genom rotutdragning har vi att ekvationen ger

$$x-\tfrac{5}{2}=\pm\sqrt{\tfrac{9}{4}}.$$

Rotuttrycket i högerledet kan vi förenkla genom att identifiera att $4=2^2$ och $9=3^2$,

$$\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm\sqrt{\frac{3^2}{2^2}}=\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\pm\frac{3}{2}.$$

Därmed har vi att

$$x-\tfrac{5}{2}=\pm\tfrac{3}{2}$$

och lösningarna blir

$$x=\tfrac{5}{2}\pm\tfrac{3}{2}=\begin{cases}\tfrac{8}{2}\\ \tfrac{2}{2}\end{cases}=\begin{cases}4\\ 1\end{cases}$$

Svar: $x=1$ eller $x=4$

4. Lös ekvationssystemet $\begin{cases}x-3y=-25\\ 4x+5y=19\end{cases}$

Lösningsförslag: Ur den första ekvationen kan vi lösa ut x genom att addera $3y$ till båda led,

$$x=-25+3y.$$

Ersätter vi x med $-25+3y$ i den andra ekvationen får vi en ekvation som endast innehåller y,

$$\begin{aligned}4(-25+3y)+5y&=19,\\ -100+12y+5y&=19,\\ -100+17y&=19.\end{aligned}$$

Addera 100 till båda led,

$$\begin{aligned}-100+17y+100&=19+100\\ 17y&=19+100\\ 17y&=119.\end{aligned}$$

Dela båda led med 17,

$$y=\frac{119}{17}=7.$$

Sambandet $x=-25+3y$ ger därefter att

$$x=-25+3\cdot 7=-25+21=-4.$$

Svar: $x=-4$, $y=7$

5. Rita den räta linjen $\dfrac{x}{10} - \dfrac{y}{5} = 1$ och bestäm skärningspunkten med x-axeln.

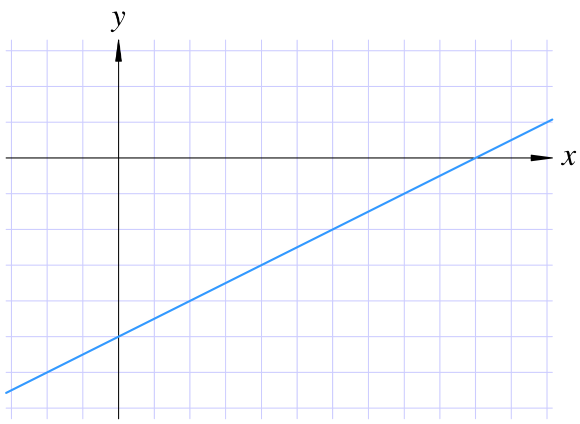
Lösningsförslag: Flytta om termerna så att y hamnar ensamt i ena ledet,

$$\frac{y}{5} = \frac{x}{10} - 1.$$

Multiplicera båda led med 5,

$$\frac{5y}{5} = \frac{5x}{10} - 5 \cdot 1$$
$$y = \tfrac{1}{2}x - 5.$$

Vi ser att den räta linjen har riktningskoefficient $\frac{1}{2}$ och skär y-axeln i $y = -5$.



Linjen skär x-axeln där $y = 0$, dvs.

$$0 = \tfrac{1}{2}x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad 5 = \tfrac{1}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad x = 5 \cdot 2 = 10.$$

Svar: Se figur ovan och $x = 10$

6. Uttryck $\ln 27$ i termer av $\ln 3$.

Lösningsförslag: Talet 27 kan skrivas som $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ och med logaritmlagen $\ln a^b = b \ln a$ får vi att

$$\ln 27 = \ln 3^3 = 3 \ln 3.$$

Svar: $3 \ln 3$