

Lösningsförslag till tentamen i SF1683 och SF1629 (del 1)
23 oktober 2017

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.

Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina. Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1. Betrakta differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = y(y - \alpha).$$

a). Bestäm de kritiska punkterna samt rita faslinjen i fallen då $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ och $\alpha > 0$.

Lösning. Kritiska punkter:

$$y(y - \alpha) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ eller } y = \alpha.$$

b). Låt $\alpha = 1$. Bestäm explicit den lösning som uppfyller $y(0) = 2$, och ange för vilka positiva t som den är definierad. Bestäm därefter den lösning som uppfyller $y(0) = 1/2$ samt ange för vilka $t > 0$ som den är definierad.

Vilka (vilken) av de två lösningarna ovan är begränsade för alla $t > 0$?

Lösning. Ekvationen är separabel. Vi separerar variablerna och integrerar:

$$t + C = \int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dy}{y-1} - \int \frac{dy}{y} = \ln \left| \frac{y-1}{y} \right|.$$

Detta är ekvivalent med $\left| \frac{y-1}{y} \right| = Ce^t$.

Betrakta lösningen som uppfyller $y(0) = 2$. Vi har $y(0) > 1$ (dvs $y(0)$ ligger i det intervallet där $dy/dt = y(y-1) > 0$). Eftersom systemet är autonom och högerledet $y(y-1)$ är kontinuerligt deriverbar, har vi $y(t) > 2$ för alla $t > 0$. Därför har vi $\left| \frac{y-1}{y} \right| = \frac{y-1}{y}$ för alla $t < 0$. Insättning av begynnelsevärdet ger och $C = 1/2$, och

$$y = \frac{1}{1 - 1/2e^t}.$$

Denna funktion är definierad för $0 \leq t < \ln 2$. Motsvarande lösning är obegränsad (det följer från den explicita formeln eller från faslinjen).

Betrakta lösningen som uppfyller $y(0) = 1/2$. Vi har $0 < y(0) < 1$ ($y(0)$ ligger mellan kritiska punkterna 0 och 1), och därför $0 < y(t) < 1$ för alla $t > 0$. I denna intervall har vi $\left| \frac{y-1}{y} \right| = \frac{1-y}{y}$. Insättning av begynnelsevärdet ger och $C = 1$, och

$$y = \frac{1}{e^t + 1}.$$

Denna funktion är definierad för alla $t > 0$. Motsvarande lösning är begränsad och går mot 0 då $t \rightarrow \infty$ (det följer från den explicita formeln eller från faslinjen).

2. Det är lätt att se att $y(x) = x^3$ är en lösning till ekvationen

$$x^2 y''(x) - xy'(x) - 3y(x) = 0, \quad x > 0,$$

Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$x^2 y''(x) - xy'(x) - 3y(x) = 4x^3, \quad x > 0.$$

Lösning. Vi kan använda reduktion av ordning. Då söker vi en lösning på formen $y(x) = x^3 u(x)$. Insättning i ekvationen ger:

$$x^5 u'' + 5u'x^4 = 4x^3.$$

Vi inför en ny variabel $v := u'$. Då $x^5 v' + 5vx^4 = 4x^3$. Observera att detta kan skrivas om:

$$(x^5 v)' = 4x^3 \Leftrightarrow x^5 v = x^4 + C \Leftrightarrow v = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^5}$$

Detta ger $u = \ln x + \frac{C_1}{x^4} + C_2$, och

$$y(x) = x^3 u(x) = x^3 \ln x + \frac{C_1}{x} + C_2 x^3.$$

Observera att $y_1 = x^3$ och $y_2 = \frac{1}{x}$ utgör en fundamental lösningsmängd för den homogena ekvationen ovan, eftersom de är lösningar och $W[y_1, y_2] \neq 0$ för $x > 0$ (Verifiera!). Funktionen $y_p(x) = x^3 \ln x$ (som motsvarar $C_1 = C_2$ i formeln ovan) är en partikulär lösning till den inhomogena ekvationen ovan. Därför ges den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen av

$$y(x) = x^3 \ln x + \frac{C_1}{x} + C_2 x^3.$$

3. a). Lös begynnelsevärdesproblemet

2p.

$$X' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Matrisen har egenvärden $r_1 = 2$ och $r_2 = 4$ med motsvarande egenvektorer $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $V_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Den allmänna lösningen till systemet ges av

$$X(x) = c_1 V_1 e^{r_1 x} + c_2 V_2 e^{r_2 x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x}.$$

b). Bestäm den allmänna lösningen till systemet

2p.

$$X' = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -5x + 2 \\ -x - 3 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Vi ansätter en lösning på formen $X = \begin{pmatrix} ax+b \\ cx-d \end{pmatrix}$ och sätter in i systemet. Man får $X_p = \begin{pmatrix} x/4 + 29/16 \\ 5x/4 + 39/16 \end{pmatrix}$. Den allmänna lösningen blir

$$X(x) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4x} + \begin{pmatrix} x/4 + 29/16 \\ 5x/4 + 39/16 \end{pmatrix}.$$

4. Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ay + ax^3 - x \end{cases}$$

där $a \geq 0$ är en parameter och $x = x(t)$, $y = y(t)$ är beroende variabler. För varje val av $a \geq 0$ klassificera motsvarande kritiska punkter av systemet med avseende på typ av faspotträtt (sadel, nod osv) och stabilitet (stabil, asymptotiskt stabil eller instabil). Man behöver inte ange typ för fallet $a = 2$.

Lösning. De kritiska punkterna ges av

$$\begin{cases} y = 0 \\ ax^3 - x = 0 \end{cases}$$

Om $a = 0$ har vi en kritisk punkt $(0, 0)$. Observera att för $a = 0$ är systemet linjär:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

Dess egenvärden är $r_{1,2} = \pm i$ (imaginära). Den kritiska punkten är ett centrum, den är stabil.

Om $a > 0$ har vi tre kritiska punkter: $(0, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{a}}, 0)$ $(-\frac{1}{\sqrt{a}}, 0)$. Jakobianen för systemet har form

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3ax^2 - 1 & -a \end{pmatrix}, \quad J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{pmatrix}, \quad J(\pm \frac{1}{\sqrt{a}}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -a \end{pmatrix}.$$

$J(0, 0)$ har egenvärden $r_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

För $0 < a < 2$ är $Im(r_{1,2}) \neq 0$, och $Re(r_{1,2}) = -a < 0$. Kritiska punkten är en stabil spiral.

För $a \geq 2$ är egenvärden reella. Eftersom $\sqrt{a^2 - 4} < a$, har vi $r_{1,2} < 0$. Kritiska punkten är en stabil nod.

Vidare, $J(\pm \frac{1}{\sqrt{a}}, 0)$ har egenvärden $r_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8}}{2}$. Eftersom $\sqrt{a^2 + 8} > a$, har vi att $r_{1,2}$ har olika tecken. Kritiska punkten är en sadel (instabil).

5. Bestäm rekursionsrelationen för potensserielösningen till Legendres ekvation

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + 20y(x) = 0$$

kring punkten $x = 0$.

Bestäm den lösning som uppfyller $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Lösning. Beteckna $P(x) = 1 - x^2$. Eftersom alla koefficienter i den linjära ekvationen ovan är analytiska i en omgivning av origo, och $P(0) \neq 0$, är origo en ordinär punkt för ekvationen. Vi söker en lösning på formen $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Derivering ger:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Insättning ger:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n - 2n a_n + 20 a_n) x^n = 0$$

Denna serie är identiskt lika med 0 om och endast om alla koefficienter är lika med 0. Vi får rekursionsrelationen

$$a_{n+2} = \frac{n^2 + n - 20}{(n+2)(n+1)} a_n = \frac{(n+5)(n-4)}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

Villkoret $y(0) = 1$ ger $a_0 = 1$, villkoret $y'(0) = 0$ ger $a_1 = 0$. Rekurrensrelationerna ger: $a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = 0$, och

$$a_2 = -10, \quad a_4 = \frac{35}{3}, \quad a_6 = a_8 = \dots = a_{2n} = 0.$$

Alltså, lösningen till begynnelsevärdesproblemet ovan är

$$y(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4.$$

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Fullständig motivering krävs! Varje korrekt delsvar ger 1p.

a). Lösningar $y_1 = 2e^t + e^{2t}$ och $y_2 = 2e^t + 3e^{3t}$ bildar en fundamental lösningsmängd för ekvationen

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = 4e^t.$$

Lösning. Falskt! Ekvationen är linjär inhomogen, och har därför ingen fundamental lösningsmängd. (Detta begrepp har ingen mening eftersom en linjär kombination av två lösningar behöver inte vara lösning. Till exempel, $y_1 - y_2$ är inte en lösning till ekvationen ovan.

b). Om X_0 är en instabil kritisk punkt till systemet

$$X' = f(X),$$

så för varje $\epsilon > 0$ finns det ett $\delta > 0$ sådan att för varje lösning $X = X(t)$ som uppfyller $|X(0) - X_0| < \delta$ gäller att $|X(t) - X_0| > \epsilon$ för alla tillräckligt stora $t > 0$.

Lösning. Falskt! Om X_0 är en instabil kritisk punkt till systemet ovan, så finns det en $\epsilon > 0$ sådan att för varje $\delta > 0$ finns en lösning $X = X(t)$ som uppfyller $|X(0) - X_0| < \delta$ men $|X(t) - X_0| > \epsilon$ för något $t > 0$.

Man kan också säga så här: Instabilitet behöver inte medföra att alla lösningar som startar nära 0 lämnar en fixerad omgivning. Betrakta systemet $\frac{dx}{dt} = x$, $\frac{dy}{dt} = -y$. Origo är en sadelpunkt, alltså instabil. Tag ett $\epsilon > 0$. Vilken är $\delta > 0$ vi tar, så finns det alltid en lösning (till exempel, med begynnelsevärden $x(0) = 0$, $y(0) = \delta/2$) som konvergerar mot 0 då $t \rightarrow \infty$.

c). För varje kontinuerlig funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ så gäller det att om y_1 och y_2 är lösningar till

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(t)y(t)$$

(definierade på $\mathbb{R}$), så är $y_3 = y_1 y_2$ en lösning till $\frac{dy}{dt}(t) = f(t)y(t)$.

Lösning. Falskt! Låt $y_3 = y_1 y_2$. Då gäller för alla t att

$$y_3' = (y_1 y_2)' = y_1' y_2 + y_1 y_2' = 2f y_1 y_2 = 2f y_3.$$

Men om y_3 är en lösning, så måste $y_3' = f y_3$ för alla t . Vi ser att y_3 är en lösning om $f(t)y_3(t) = 2f(t)y_3(t)$ för alla t . Detta krav är inte uppfyllt för alla f och alla lösningar.

Man kan också svara med ett explicit motexempel.

d). Det finns en kontinuerligt deriverbar funktion f sådan att ekvationen

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(y(t))$$

har en kontinuerligt deriverbar lösning $y(t)$ definierad på ett öppet intervall I med egenskap att $y'(t_1) < 0$ och $y'(t_2) > 0$ för några $t_1, t_2 \in I$.

Lösning. Falskt! Antag motsatsen: att det finns en kontinuerligt deriverbar lösning $y(t)$ definierad på ett öppet intervall I med egenskap att $y'(t_1) < 0$ och $y'(t_2) > 0$ för några $t_1, t_2 \in I$.

Eftersom både funktionen $f(y)$ och lösningen $y(t)$ är kontinuerliga, så är sammansättningen $f(y(t))$ kontinuerlig. Eftersom $f(y(t_1)) = y'(t_1) < 0$ och $f(y(t_2)) = y'(t_2) > 0$, så finns det en punkt t_0 mellan t_1 och t_2 där $f(y(t_0)) = 0$. Men ekvationen är autonom, och $f(y(t_0)) = 0$ medför att $y(t) = y(t_0)$ för alla $t \in I$ är (ekvilibrum) lösning.

Eftersom f är kontinuerligt deriverbar, kan entydighetssatsen tillämpas. Denna medför att ekvilibrumlösningen $y(t) = y(t_0)$ för alla $t \in I$ är den enda lösningen som uppfyller $y(t) = y(t_0)$. Men för ekvilibrumlösningen har vi $y'(t_1) = y'(t_2) = 0$, vilket strider mot antagandet.