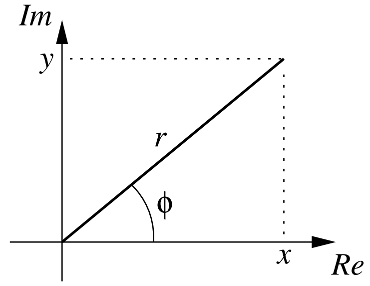
KTH Datavetenskap
och kommunikation

Spektrala transformer
Formelsamling

Komplexa tal

$$x + jy = re^{j\phi} = r\cos\phi + jr\sin\phi$$

$$\phi = \arctan\frac{y}{x} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$



Eulers formler

$$\sin\phi = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j} \qquad \cos\phi = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}$$

$$e^{j\pi} + 1 = 0$$

Komplexa räknerelger

$$z_1 = x_1 + jy_1 = r_1 e^{j\phi_1} \qquad z_2 = x_2 + jy_2 = r_2 e^{j\phi_2}$$

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + j(y_1 - y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1) = r_1r_2e^{j(\phi_1+\phi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_2y_1 - x_1y_2)}{{x_2}^2 + {y_2}^2} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\phi_1-\phi_2)}$$

Trigonometriska identiterer

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Deriveringsregler

$$\begin{aligned}
[g(f(x))]' &= g'(f(x))\,f'(x) \\
[g(x)h(x)]' &= g'(x)h(x) + h'(x)g(x) \\
\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]' &= \frac{g'(x)h(x) - h'(x)g(x)}{h^2(x)}
\end{aligned}$$

Decibel

Två signaler med amplituderna A_1 och A_2 har dB-förhållandet $20\log(A_2/A_1)$
Två signaler med effekterna P_1 och P_2 har dB-förhållandet $10\log(P_2/P_1)$

Samplingsteoremet
En signal som samplas vid frekvensen f_s kan rekonstrueras exakt om signalen endast innehåller information under halva samplingsfrekvensen, dvs om signalen är bandbegränsad till $f_s/2$

Faltning

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Faltning i 2D

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} h(s,t)f(x-s, y-t)$$

Faltningsteoremet
Faltning av två signaler i tids-/spatialdomänen motsvarar multiplikation i frekvensdomänen.
Faltning av två signaler i frekvensdomänen motsvarar multiplikation i tids-/spatialdomänen.

Filter

Ett tidsdiskret linjärt filter som beskrivs av differensekvationen

$$\begin{aligned} y(n) &= b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2) + \ldots + b_Nx(n-N) \\ &\quad -a_1y(n-1) - a_2y(n-2) \ldots - a_My(n-M) \end{aligned}$$

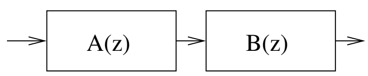
har överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \ldots + b_Nz^{-N}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \ldots + a_Mz^{-M}}$$

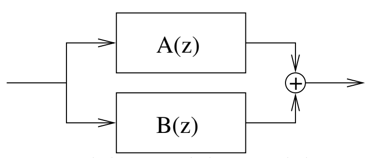
och frekvenssvaret

$$H(\omega) = \frac{b_0 + b_1e^{-j\omega} + b_2e^{-j2\omega} + \ldots + b_Ne^{-jN\omega}}{1 + a_1e^{-j\omega} + a_2e^{-j2\omega} + \ldots + a_Me^{-jM\omega}}$$

Kaskad- och parallellkoppling



$H(z) = A(z)B(z)$



$H(z) = A(z) + B(z)$

Geometrisk serie

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Fourierserier

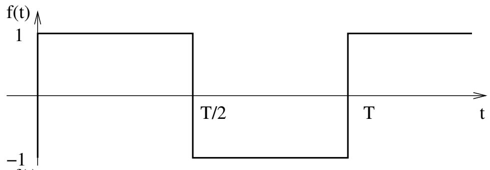
En tidskontinuerlig periodisk signal $f(t) = f(t+T)$ där $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ kan skrivas som en viktad summa av komplexa fasvektorer

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

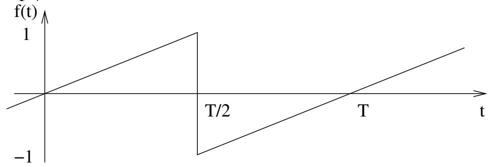
där vikterna c_k kan beräknas ur den ursprungliga signalen med integralen

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Några vanliga fourierserier



$$c_k = \begin{cases} -\frac{2j}{k\pi} & \text{om} \quad k = 1, 3, 5, \ldots \\ 0 & \quad\quad\; annars \end{cases}$$



$$c_k = \begin{cases} -\frac{j}{k\pi} & \text{om} \quad k = 1, 3, 5, \ldots \\ \frac{j}{k\pi} & \quad\quad\; annars \end{cases}$$

Z-transform

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Några användbara Z-transformpar

$x(n)$	$X(z)$	Anm.
$\delta(n)$	1	$\delta(n) = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ 0 & , \quad n \neq 0 \end{cases}$
$\delta(n-k)$	z^{-k}	
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$u(n) = \begin{cases} 1 & , \quad n \geq 0 \\ 0 & , \quad n < 0 \end{cases}$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	
$x(n-k)u(n-k)$	$z^{-k}X(z)$	

Diskret fouriertransform (DFT)

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jnk2\pi/N}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) e^{jnk2\pi/N}$$

Partialbråksuppdelning

1. Faktorisera nämnaren genom att hitta de komplexa nollställerna, t.ex. genom kvadratkomplettering.

2. Skapa ett bråk för varje gradtal i täljaren och anta en av följande ansatser för var och en av bråken:

$$\frac{z}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{A}{z-p_1} + \frac{B}{z-p_2}$$

$$\frac{1}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{A}{z-p_1} + \frac{B}{z-p_2}$$

$$\frac{z}{(z-p)^2} = \frac{A}{(z-p)^2} + \frac{B}{z-p}$$

   Observera att varje ansats kan multipliceras med z för att höja gradtalet, vilket kan vara önskvärt om man har högre grad i täljaren eller om man vill finna transformparen $a^n \leftrightarrow \frac{z}{z-a}$.

3. Skriv på samma bråkstreck och formulera ett ekvationssystem med en ekvation per gradtal hos z.

Exempel: Anta första ansatsen och höj gradtalet genom att multiplicera med z på bägge sidor. Ekvationssystemet blir:

$$z^2 = z^2(A+B) - z(Ap_2 + Bp_1)$$

$$\begin{aligned} z^2 &: \quad 1 = A + B \\ z^1 &: \quad 0 = Ap_2 + Bp_1 \end{aligned}$$

$$A = \frac{p_1}{p_1 - p_2} \qquad B = \frac{p_2}{p_2 - p_1}$$