KTH, Matematik
Maria Saprykina

Lösningsförslag till tentamen i SF1683 och SF1629 (del 1)
18 december 2017

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.
Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1. Betrakta differentialekvationen

$$xy' - y = \frac{1}{y}.$$

a). Bestäm den lösning till differentialekvationen som uppfyller $y(1) = -2$. Bestäm lösningens existensinterval.

Lösning. Ekvationen kan skrivas om som

$$xy' = \frac{y^2+1}{y}.$$

Den är separabel, och för $x \neq 0$ är den ekvivalent med

$$\int \frac{ydy}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \ln|x| + C_1 \Leftrightarrow (y^2+1)^{1/2} = C_2|x|,$$

där $C_2 = e^{C_1} > 0$. Eftersom begynnelsevärdet är angivet i $x = 1 > 0$, betraktar vi intervallet $x > 0$ (och här $x = |x|$). Vi får lösningar $y = \sqrt{Cx^2-1}$ eller $y = -\sqrt{Cx^2-1}$.

Begynnelsevärdet ger: $-2 = -\sqrt{C-1} \Leftrightarrow C = 5$. Lösningen till begynnelsevärdesproblemet är $y = -\sqrt{5x^2-1}$. Den är definierad för alla $x > \frac{1}{\sqrt{5}}$.

b). Kan man hitta en lösning $y = \phi(x)$, $x > 0$, till differentialekvationen ovan samt positiva tal x_1, x_2 sådana att $\phi(x_1) < 0$ and $\phi(x_2) > 0$?

Lösning. Antag att $x_1 < x_2$. För $x > 0$ har vi $y' = \frac{y^2+1}{xy}$, dvs $y'(x)$ har samma tecken som y. Om $y = \phi(x_1) < 0$, så är $\phi(x)$ avtagande, och därför måste vi ha $\phi(x_2) < \phi(x_1) < 0$. Svaret är Nej.

2. Det är lätt at se att $y(x) = x^2$ är en lösning till ekvationen

$$2x^2y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = 0, \quad x > 0,$$

Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen

$$2x^2y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = 13x^6, \quad x > 0.$$

Lösning. Beteckna $y_1(x) = x^2$. Vi kan använda reduktion av ordning och söka lösningen på formen $y(x) = y_1(x)u(x)$. Vi deriverar ansatsen och sätter in i ekvationen. Efter förenkling får vi:

$$7x^3u'(x) + 2x^4u''(x) = 13x^6 \Leftrightarrow u''(x) + \frac{7}{2x}u'(x) = \frac{13}{2}x^2.$$

Låt $v(x) = u'(x)$. Då får vi en första ordningens ekvation

$$v'(x) + \frac{7}{2x}v(x) = \frac{13}{2}x^2.$$

Multiplicerar med integrerande faktor $x^{7/2}$:

$$\left(vx^{7/2}\right)' = \frac{13}{2}x^2x^{7/2} = \frac{13}{2}x^{11/2}.$$

Integrering ger:

$$vx^{7/2} = x^{13/2} + C \Leftrightarrow u' = v = x^3 + Cx^{-7/2} \Leftrightarrow u(x) = \frac{1}{4}x^4 + C_1x^{-5/2} + C_2.$$

Den ursprungliga ekvationen har lösningar

$$y(x) = y_1(x)u(x) = C_1x^{-1/2} + C_2x^2 + \frac{1}{4}x^6.$$

Denna formel beskriver den allmänna lösningen till den ursprungliga ekvationen. Motiverig är följande:

Den allmänna lösningen till en inhomogen linjär ekvation är summa av en lösning till denna ekvation och den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvationen.

Både $y_1 = x^2$ och $y_2 = x^{-1/2}$ är lösningar till den homogena ekvationen. De utgör en fundamental lösningsmängd för den homogena ekvationen eftersom

$$W[y_1, y_2] \neq 0 \quad \text{för} \quad x > 0.$$

(Verifiera!) Funktionen $y_p(x) = \frac{1}{4}x^6$ är en lösning till den ursprungliga inhomogena ekvationen.

3. a). Lös begynnelsevärdesproblemet

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b). Skissa några lösningskurvor i en omgivning av origo.

Lösning. Systemets matris har komplexa egenvärden $r_1 = -1 + i$ och $r_2 = -1 - i$. En egenvektor motsvarande $r_1 = -1 + i$ är $V_1 = \binom{1-i}{-1}$. En komplex lösning är

$$Z(t) = e^{(-1+i)t}\begin{pmatrix} 1 - i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom systemets matris är reell, och $r_1 \neq r_2$, vet vi att real- och imaginärdel av $Z(t)$ är två linjärt oberoende lösningar. Dessa ges av

$$X_1(t) := \text{Re}(Z(t)) = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \quad X_2(t) := \text{Im}(Z(t)) = e^{-t}\begin{pmatrix} -\cos t + \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen ges av $X(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t)$.
Begynnelsevärdet ger:

$$X(0) = c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow c_1 = -1,\ c_2 = -2,$$

och lösningen till begynnelsevärdesproblemet ges av

$$X(t) = -e^{-t}\begin{pmatrix}\cos t + \sin t\\-\cos t\end{pmatrix} - 2e^{-t}\begin{pmatrix}-\cos t + \sin t\\-\sin t\end{pmatrix}.$$

b). Eftersom matrisen har komplexa egenvärden med negativ realdel, är lösningskurvorna spiraller riktade mot origo. De roterar "moturs". För att inse det, skissa en riktningsvektor, t.ex., i punkt $X = \binom{0}{1}$. Denna vektor är $X' = AX = \binom{-2}{0}$.
4. (SF1629) Bestäm $y(t)$ då

$$y(t) + 2\int_0^t \cos(t-u)y(u)du = 1, \quad t \geq 0.$$

Ange även $y(0)$.
Lösning. Observera att integralen ovan kan tolkas som faltning: $(\cos u * y(u))$. Vi laplacetransformerar ekvationen (betecknar $Y(s) := \mathcal{L}[y](s))$):

$$Y(s) + 2\frac{s}{s^2+1}Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Vi löser ut $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{s(s+1)^2}.$$

Partialbråksuppdellning ger:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s+1)^2}.$$

Inverstransformering ger

$$y(t) = 1 - 2te^{-t}.$$

$y(0)$ kan bestämmas från den ursprungliga ekvationen: $y(0) = 1$. Detta stämmer överens med lösningen.

4. (SF1683) Använd en lämplig Lyapunov funktion för att avgöra om kritiska punkten $(0,0)$ för systemet

$$\begin{cases} x' = 2y - x^3 \\ y' = -x - y^3 \end{cases}$$

är stabil, asymptotiskt stabil eller instabil. Tips: Sök en Lyapunov funktion på formen $V(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ med lämpliga konstanter a, b, c. Formulera den sats du använder, motivera alla steg.

Lösning. Antag att ett autonomt system

$$\begin{cases} x' = F(x,y) \\ y' = G(x,y) \end{cases}$$

där $(x,y) = (x(t),y(t))$ har en isolerad kritisk punkt i origo. Antag att det finns en funktion $V(x,y)$ som är kontinuerlig med kontinuerliga första partiella derivator och positivt definit, samt att funktionen

$$W(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}F(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y}G(x,y)$$

är negativt definit i en omgivning av origo. Då är origo en asymptotiskt stabil fixpunkt (se Theorem 9.6.1 i boken).

Vi söker Lyapunov funktion på formen $V(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Låt $(x(t),y(t))$ vara en lösning till systemet.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(x(t),y(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y' = (2ax+by)(2y-x^3) + (bx+2cy)(-x-y^3) \\ &= (4a-2c)xy - 2ax^4 - 2cy^4 + 2by^2 - byx^3 - bx^2 - bxy^3 \end{aligned}$$

Låt oss välja $b = 0$, $a = 1$ $c = 2a = 2$. Då är funktionen $V(x,y) = x^2 + 2y^2$ positivt definit (dvs $V(x,y) > 0$ för alla $(x,y) \neq (0,0)$), och $\frac{d}{dt}V(x(t),y(t)) = -2x^4 - 4y^4$ negativt definit. Lyapunovs sats innebär att kritiska punkten $(0,0)$ är asymptotiskt stabil.

5. Betrakta Bessels ekvation:

$$x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0.$$

a). Visa att 0 är en reguljär singulär punkt.

b). Bestäm en potensserielösning $y(x)$ som uppfyller $y(0) = 1$.

Lösning. Vår ekvation har form $P(x)y''(x) + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$ där $P(x)$, $Q(x)$ och $R(x)$ är analytiska funktioner. Eftersom $P(0) = 0$, är $x = 0$ en singulär punkt. Eftersom både $x\frac{Q(x)}{P(x)} = 1$ och $x^2\frac{R(x)}{P(x)} = x^2$ har ändliga gränsvärden då $x \to 0$, är detta en reguljär singulär punkt.

Vi gör ansats för en lösning: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ där r och a_n, $n = 0,1,2,\ldots$ sökes, och $a_0 \neq 0$.

Vi behöver uttrycket $x^2y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+r}$.

Deriverar ansatsen och sätter in i ekvationen:

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n-r)a_n x^{n+r-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n-r)(n-r-1)a_n x^{n+r-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-r)(n-r-1)a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n-r)a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+r} = 0$$

Jämför koefficienter vid x^{n+r} för $n = 0,1,2,\ldots$. För $n = 0$ har vi: $r^2a_0 = 0$. Eftersom $a_0 \neq 0$ enligt antagandet, har vi $r = 0$ (dvs indexekvationen har en dubbelrot $r = 0$).

Vidare, $n = 1$ (och $r = 0$) ger $a_1 = 0$, och för $n = 2, 3 \ldots$ har vi

$$n_2 a_n = -a_{n-2}.$$

Med hjälp av induktionsprincipen visar man att för $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_{2n+1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} a_0.$$

och vi får lösningar $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2} x^{2n}$.

Vi har $y(0) = a_0$. Den lösning som uppfyller $y(0) = 1$ är $y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (n!)^2} x^{2n}$.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska. Fullständig motivering krävs! Varje korrekt delsvar ger 1p.

a). Ekvationen

$$y'(x) = \sin y(x) + 2$$

har en begränsad lösning.

Lösning. Falskt. Eftersom $\sin y(x) \geq -1$ för alla $x \in \mathbb{R}$, har vi $y'(x) \geq 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Därför kan begränsade lösningar inte finnas.

b). Begynnelsevärdesproblemet

$$e^x \frac{dy}{dx} = e^{y^2} \cdot \sin x - \frac{1}{y^2 + 1}, \quad y(0) = 0$$

har en unik lösning definierad i en omgivning av origo.

Lösning. Sannt. Ekvationen har form $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, där $f(x, y) = e^{-x} e^{y^2} \cdot \sin x - e^{-x} \frac{1}{y^2+1}$. Observera att både $f(x, y)$ och $\frac{d}{dy} f(x, y)$ är kontinuerliga i en omgivning av origo (faktiskt, för alla (x, y)). Satsen om exixtens och entydighet av lösningar medför nu att begynnelsevärdesproblemet ovan har en unik lösning definierad i en omgivning av origo.

c). Låt f och g vara två kontinuerliga funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Om ϕ_1 och ϕ_2 är lösningar till

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t) + g(t),$$

(definierade på $\mathbb{R}$) så är även $3\phi_1 - 2\phi_2$ en lösning till samma ekvation.

Lösning. Sannt. Låt $y_p(x)$ vara en lösning till ekvationen ovan, och $y_h(x)$ vara en icke-trivial lösning till den homogena ekvationen $\frac{d\phi}{dt}(t) = f(t)\phi(t)$. Varje lösning till den ursprungliga ekvatione har form form

$$\phi(x) = c y_h(x) + y_p(x),$$

och alla uttryck av denna form är lösningar till ekvationen. Vidare, låt $\phi_i(x) = c_i y_h(x) + y_p(x)$, $i = 1, 2$, vara de givna lösningarna. Då är

$$3\phi_1 - 2\phi_2 = 3(c_1 y_h(x) + y_p(x)) - 2(c_2 y_h(x) + y_p(x)) = (3c_1 - 2c_2) y_h(x) + y_p(x)$$

har samma form, och är därför en lösning till ekvationen.

d). Det finns ett $\delta > 0$ sådant att om $|a| < \delta$, så uppfyller lösningen $x = \phi(t)$ till begynnelsevärdesproblemet

$$x'' + 2x' - 3(x')^2 + x - 2x^3 = 0, \quad x(0) = a, \;\; x'(0) = 0$$

att $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$.

Lösning. Sannt. Detta problem handlar om stabilitet. Skriv om ekvationen som system: låt $y := x'$. Då $y' = x''$, och vi får systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -2y + 3y^2 - x + 2x^3. \end{cases}$$

Vi linjäriserar systemet i origo. Det linjäriserade systemet har form $X' = AX$ där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2. \end{pmatrix}$$

Matrisen A har egenvärden $r_1 = r_2 = -1 < 0$. Detta medför att det ursprungliga systemet är asymptotiskt stabil. Därför finns det $\delta > 0$ sådant att om $(x(0)^2 + y^2(0))^{1/2} < \delta$, så $(x(t), y(t)) \to (0, 0)$ då $t \to \infty$. Detta medför påståendet ovan som specialfall.