

**Lösningsförslag till tentamen i SF1629,
Differential ekvationer och Transformer II (del 2)
8 januari 2018**

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.

Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.

Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina.

Tillåtna hjälpmedel: formelsamlingen BETA.

OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1. Använd separation av variabler för att lösa randvärdesproblemet

$$u_x(x, y) = u_y(x, y) + u(x, y), \quad u(x, 0) = 4e^{-2x} + 5e^{3x}.$$

Lösning. Vi söker lösningar på formen $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Insättning i ekvationen ger:

$$X'(x)Y(y) = X(x)Y'(y) + X(x)Y(y).$$

Dividera med $X(x)Y(y)$ (vi antar att denna faktor är skild från 0):

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} + 1 := \lambda$$

där λ är en (godtycklig) konstant, eftersom HL i likheten är oberoende av y , och VL är oberoende av x . Detta ger oss ett system av ordinarie differentialekvationer:

$$\begin{cases} X'(x) = \lambda X(x) \\ Y'(y) = (\lambda - 1)Y(y). \end{cases}$$

För varje λ ges dess lösning av

$$\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{(\lambda-1)y}. \end{cases}$$

Produkten $u(x, y) = Ce^{\lambda x + (\lambda-1)y}$ är alltså en lösning till den ursprungliga ekvationen (för valfri konstant C). Även linjära kombinationer på formen

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^N C_j e^{\lambda_j x + (\lambda_j-1)y}$$

är lösningar till samma ekvation (för valfria konstanter $N \in \mathbb{N}$ och $\lambda_j, C_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, N$).

Om $u(x, 0) = 4e^{-2x} + 5e^{3x}$, så har vi $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3, C_1 = 4, C_2 = 5$, och den sökta lösningen är

$$u(x, y) = 4e^{-2x-3y} + 5e^{3x+2y}.$$

2. Bestäm de konstanter a och b som minimerar vardet av integralen

$$\int_{-1}^1 |a + bx - e^{-x}|^2 dx.$$

Lösning. Låt V vara rummet av kontinuerliga funktioner med inre produkten $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$, och låt W vara delrummet som spänns av funktioner 1 och x . Vi vet att integralen i frågan blir som minst om a och b är sådana att $a + bx$ är projektionen av funktionen e^{-x} på W .

Eftersom

$$\int_{-1}^1 1 \cdot x dx = 0,$$

är polynomen $P_0(x) = 1$ och $P_1(x) = x$ ortogonala i V . Därför kan projektionen beräknas på följande sätt:

$$a + bx = \frac{\langle P_0, e^{-x} \rangle}{\|P_0\|^2} P_0 + \frac{\langle P_1, e^{-x} \rangle}{\|P_1\|^2} P_1.$$

Vi beräknar:

$$\langle P_0, e^{-x} \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot e^{-x} dx = e - e^{-1},$$

$$\langle P_1, e^{-x} \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot e^{-x} dx = -2e^{-2},$$

$$\|P_0\|^2 = 2, \quad \|P_1\|^2 = 2/3.$$

Slutligen,

$$a + bx = \frac{e - e^{-1}}{2} - 3e^{-2}x,$$

alltså $a = \frac{e - e^{-1}}{2}$ och $b = -3e^{-2}$.

3. a). Funktionen

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{för } 0 < x \leq 1, \\ 3 & \text{för } 1 < x \leq \pi \end{cases}$$

utvecklas i en sinus-serie $S(x)$ på intervallet $[0, \pi]$. Ange $S(1)$, $S(2)$ och $S(\pi)$. Formulera satsen som du har använt.

Lösning. Låt oss definiera funktionen $\tilde{g}$ på följande sätt:

$\tilde{g}(x) = g(x)$ för alla $x \in [0, 1]$,

$\tilde{g}$ är udda på intervallet $(-\pi, \pi)$,

$\tilde{g}$ är 2π -periodisk på $\mathbb{R}$.

Den nya funktionen $\tilde{g}$ kan utvecklas till en Fourier-serie $S(x)$, och denna serie är en sinus-serie (dvs alla dess termer har form $c_n \sin nx$). Enligt sats 4.5 i Vretblads bok (Formulering krävs!),

$$S(x) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(x_-) + \tilde{g}(x_+)).$$

Vi beräknar: $S(1) = \frac{1}{2}(g(1_-) + g(1_+)) = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2$,

$S(2) = \frac{1}{2}(g(2_-) + g(2_+)) = \frac{1}{2}(3 + 3) = 3$ (serien konvergerar till funktionen i funktionens kontinuitetspunkter);

$$S(\pi) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(x_-) + \tilde{g}(x_+)) = \frac{1}{2}(3 - 3) = 0.$$

b). Låt f vara en kontinuerlig 2π -periodisk funktion som uppfyller $f(x + \pi) = f(x)$ för $x \in [-\pi, \pi]$. Visa att alla de udda Fourierkoefficienterna av f är noll, dvs $c_{2k+1} = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lösning. Foureier-serien av f har form $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx}$ där

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^0 f(x) e^{-inx} dx + \int_0^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \int_0^{\pi} f(x) e^{-inx} (1 + e^{-in\pi}) dx.$$

Om n är udda, har vi $1 + e^{-in\pi} = 0$, och därför är $c_n = 0$.

4. Fouriertransformen definieras av $\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$.

a). Bevisa skalningsformeln för Fouriertransform:

1p.

$$\mathcal{F}[f(at)](w) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0.$$

Lösning. För $x = at$ har vi:

$$\mathcal{F}[f(at)](w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(\omega/a)t} dx = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0.$$

b). Tabellen för Fourier-transformer i [V] ger: $\mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\right] = e^{-\omega^2/2}$. Använd Fourier-transform för att lösa

3p.

$$e^{-t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4(t-x)^2} f(x) dx$$

Lösning. Planen är att Fourier-transformera ekvationen. Vi kan tolka integralen i högerled som faltning

$$e^{-4t^2} * f(t)$$

och använda att

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g].$$

Vi ska behöva transformera funktioner på formen $f(t) = e^{-kt}$, $k > 0$. Från formeln ovan samt skalningsformeln följer:

$$\mathcal{F}[e^{-kt^2}] = \mathcal{F}[e^{-(\sqrt{2k}t)^2/2}] = \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-(\omega/\sqrt{2k})^2/2} = \sqrt{(\pi/k)} e^{-\omega^2/(4k)}.$$

Med denna formeln får vi:

$$\mathcal{F}[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}, \quad \mathcal{F}[e^{-4t^2}] = \sqrt{(\pi/4)} e^{-\omega^2/16}.$$

Fourier-transformerar ekvationen:

$$\sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4} = \sqrt{(\pi/4)} e^{-\omega^2/16} \mathcal{F}[f].$$

Det följer att

$$\mathcal{F}[f] = 2e^{-3\omega^2/16},$$

och inverstransformen (med $k = 4/3$) ger

$$f(t) = \frac{4}{\sqrt{(3\pi)}} e^{-4t^2/3}.$$

5. a). Vad menas med att $(\phi_n)_n$ utgör en fullständig ON mängd i ett inre produktrum V ? **1p.**

Lösning. En följd av funktioner $(\phi_n)_n$ utgör en fullständig mängd i ett inre produktrum V om för varje $u \in V$ och varje $\varepsilon > 0$ finns en linjär kombination $\sum_{n=1}^N c_n \phi_n$ sådan att

$$\left\| u - \sum_{n=1}^N c_n \phi_n \right\| < \varepsilon.$$

Mängden är ON (ortonormerad) om funktionerna ϕ_n uppfyller:

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

b). Formulera Parsevals formel (som relaterar normen av funktionen till dess Fourierkoefficienter);

1p.

Lösning. Om $(\phi_n)_n$ är en fullständig ON mängd i ett inre produktrum V , och $u \in V$ har Fourier-koefficienter $c_n = \langle u, \phi_n \rangle$, så

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, \phi_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

c). Antag att $f(x)$ är en kontinuerlig funktion, och

$$\int_{-1}^1 f(x) x^n dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Använd b) för att visa att $f(x) = 0$ för alla $x \in [-1, 1]$.

Lösning. Vi vet att mängden av Legendre-polynom P_n , ($n = 0, \dots$) utgör en fullständig ortogonal mängd i rummet av kontinuerliga funktioner med inre produkt

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{\phi(x)} dx.$$

Antagandet i uppgiften medför att

$$\int_{-1}^1 f(x) P_n dx = \langle f, P_n \rangle = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Enligt Parsevals formel, $\|f\|^2 = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx = 0$. Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig, medför detta att $f(x)$ är identiskt lika med 0.

6. a). Verifiera enligt definition att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{för } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

definierar en tempererad distribution enligt formeln $f[g] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$. **1p.**

Lösning. Vi säger att en funktion ϕ tillhör Schwartz klass $\mathcal{S}$ om ϕ har derivator av alla ordningar och för alla icke-negativa heltal n, k finns konstant $C_{n,k}$ sådan att för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller

$$(1 + |x|)^n |\phi^{(k)}(x)| \leq C_{n,k}.$$

En följd av funktioner ϕ_j , $j = 1, 2, \dots$, konvergerar i $\mathcal{S}$ till en funktion $\psi \in \mathcal{S}$ om för alla icke-negativa heltal n, k gäller:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \max_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^n |\phi_j^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x)| = 0.$$

En tempererad distribution är en linjär kontinuerlig avbildning från Schwartz klass till $\mathbb{C}$.

Vi verifierar att f definierar en tempererad distribution. Först, om $\phi \in \mathcal{S}$, så är ϕ kontinuerlig, och $f[\phi] = \int_0^1 x\phi(x)dx$ är definierad.

Sedan, $f[c_1\phi_1 + c_2\phi_2] = \int_0^1 x(c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x))dx = c_1f[\phi_1] + c_2f[\phi_2]$, alltså är funktionalen linjär.

Antag att en följd funktioner $\phi_j \in \mathcal{S}$ konvergerar i $\mathcal{S}$ till $\psi \in \mathcal{S}$. Då

$$|f[\phi_j] - f[\psi]| = \left| \int_0^1 x(\phi_j(x) - \psi(x))dx \right| \leq \max_{x \in [0,1]} |\phi_j(x) - \psi(x)| \rightarrow 0$$

då $j \rightarrow \infty$, och det betyder att avbildningen ovan är kontinuerlig.

b). Beräkna f' i distributionsmening. Förkorta så långt som möjligt. **2p.**

Lösning. Vi uttrycker f i termer av Heaviside funktionen:

$$f(x) = x(H(x) - H(x-1)).$$

Vi får $f'(x) = H(x) - H(x-1) + x\delta(x) - x\delta(x-1) = H(x) - H(x-1) - \delta(x-1)$. I sista steget har vi använt formeln

$$g(x)\delta(x-a) = g(a)\delta(x-a).$$

c). Beräkna värdet av $f'[e^{-x^2}]$. Svaret skall inte innehålla integraler. **1p.**

Lösning. Enligt definitionen,

$$f'[e^{-x^2/2}] = -f[(e^{-x^2/2})'] = -f[-xe^{-x^2}] = \int_{-1}^1 x^2 e^{-x^2} dx.$$

Det har tyvärr uppstått ett fel i uppgiftformuleringen, och denna integral går inte att beräkna med enkla metoder. Alla försök kommer att belönas.