Institutionen för matematik

SF1669 Matematisk och numerisk analys II
Tentamen
Onsdagen den 14 mars 2018

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Henrik Shahgholian

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade. Lösningar som allvarligt brister i dessa avseenden bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

1. Beräkna integralen $\iint_D (x + x^2 + y^2)\,dx\,dy$ där D är en cirkelskiva med radie a och medelpunkt i origo. **(4 p)**

2. Givet funktionen $f(x,y,z) = xz^3 + x^2y^3z + yz^3$.
   a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $f(x,y,z) = 3$ i punkten $(x,y,z) = (1,1,1)$. **(2 p)**
   b) Bestäm en riktning $\boldsymbol{v}$ så att riktningsderivatan $f'_{\boldsymbol{v}}(1,1,1) = 0$. **(2 p)**

3. Antag att du har approximerat integralen
$$\int_0^{3.6} e^{-x^2/9} dx$$
med trapetsregeln där du använde steglängd $h = 0.1$. Du har uppskattat felet till ca $1.6 \cdot 10^{-4}$. Om du vill minska felet till 10^{-7}, hur bör du välja din steglängd? **(4 p)**

Del B

4. Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (z \sin y, xz \cos y, x \sin y)$.
   (a) Visa att vektorfältet $\mathbf{F}$ är konservativt i $\mathbb{R}^3$. **(2 p)**
   (b) Beräkna
   $$\int_\gamma z \sin y\, dx + xz \cos y\, dy + x \sin y\, dz$$
   då γ är kurvan som kan parametriseras som $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t/\pi)$ när t löper från 0 till π. **(2 p)**

5. Funktionen $f(x, y)$ är två gånger deriverbar med kontinuerliga andraderivator i hela $\mathbb{R}^2$. Vidare för $n = 1, 2, \cdots$, gäller det att
   $$\left|\nabla f(\frac{1}{n}, 0)\right| \leq \frac{100}{n}, \qquad \text{samt} \qquad f_{xx}(0,0) = 4, \quad f_{xy}(0,0) = 0 \quad f_{yy}(0,0) = 2.$$
   a) Är origo $(0, 0)$ en kritisk punkt till f? (Motivera ditt svar.) **(2 p)**
   b) Anta (oavsett uppgift a) att origo är en kritisk punkt för f och avgör om origo är en lokal maximum, minimum eller sadel punkt.
   (2 p)

6. Vi vill bestämma ett tredjegradspolynom $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ som interpolerar punkterna:

x	-1	-0.5	0.5	2
y	1	2	0	-3

   (a) Ställ upp det linjära ekvationssystem som måste lösas för att beräkna koefficienterna c_j. **(2 p)**
   (b) Istället för att interpolera den tredje punkten $(x, y) = (1/2, 0)$ vill vi nu att följande integralvillkor ska gälla
   $$\int_0^1 p(x)dx = 1.$$
   Hur ändrar sig ekvationsystemet? **(2 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. (a) Betrakta optimeringsproblemet att hitta största samt minsta värdet för en funktion $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$, där f och g är funktioner med kontinuerliga partiella derivator i hela $\mathbb{R}^2$. Antar f alltid ett största och ett minsta värde på mängden $g(x, y) = 0$? Bevisa ditt påstående eller ge ett motexempel. **(1 p)**

   (b) Herbert ska bygga en snögubbe bestående av två snöklot staplade på varandra. Han vill att snögubben ska ha höjden 2 m samtidigt som han vill minimera det arbete som krävs för att bygga snögubben, dvs. minimera snögubbens totala potentiella energi. Använd Lagranges multiplikatormetod för att bestämma vilka radier de två kloten ska ha för att minimera potentiella energin. **OBS:** Enbart Lagranges metod ger poäng. **(3 p)**

   (*Ledning:* En kropp har den potentiella energin mgh där m är kroppens massa, g tyngdaccelerationen, och h är masscentrums höjd över markplanet. Du kan även anta att snön har konstant masstäthet ρ.)

8. Beräkna ytintegralen
$$\iint_{\mathcal{S}} x^4 dS$$
   då $\mathcal{S}$ betecknar sfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. **(4 p)**

9. Låt
$$\phi(t) = \cos(\omega t)e^{-\sigma t^2}.$$
   Parametrarna ω och σ ska bestämmas så att
$$\phi(1) = 0.05, \qquad \phi(2) = -0.95.$$
   Värdet på ω ska ligga i intervallet $(0, 4)$. Problemet leder till ett ickelinjärt ekvationssystem för σ och ω som ska lösas med Newtons metod för system.

   (a) En bra startgissning för ω är 1.57. Ange, med motivering, en bra startgissning för σ. **(1 p)**

   (b) Skriv ett MATLAB-program som implementerar Newtons metod för system och beräknar värden på ω, σ med fel mindre än 10^{-10}. **(3 p)**