

TENTAMEN, DEL 1

SF1524

GRUNDLÄGGANDE NUMERISKA METODER OCH PROGRAMMERING

Fredag 16 mars 2018 kl 8.00-11.00

Namn:

Personnummer:

Program och årskurs:

Max antal poäng är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 12 poäng. Endast ett korrekt svar per uppgift. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Skriv svaren på dessa papper. Skriv namn och personnummer på varje sida.

1. Givet ekvationen $\cos(2\pi x) - e^x = 0$.

(2 p)

a) En iteration med Newtons metod och startgissning $x_0 = 1$ ger x_1 lika med:☐ 0☐ $e/4$ ☐ $-1/2$ ☐ $1/4$ ☐ $1/2$ ☒ $1/e$ ☐ $-2/e$ ☐ $-1/4$

(1 p)

b) Till vilken rot och på vilket sätt konvergerar Newtons metod med startgissning $x_0 = 1$?☐ linjär konvergens till $x = 1$ ☐ kvadratisk konvergens till $x = 1$ ☐ linjär konvergens till $x = 0$ ☒ kvadratisk konvergens till $x = 0$ ☐ linjär konvergens till $x = -1$ ☐ kvadratisk konvergens till $x = -1$

(2 p) 2. Integralen

$$\int_0^1 \frac{2x + (2x)^4}{2x + 1} dx$$

approximeras med trapetsregeln. Vad blir det approximativa värdet om steglängden $h = 0.5$?

☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

(2 p) 3. Låt $p(x)$ vara det andragradspolynom som interpolerar punkterna i tabellen nedan, dvs $p(x_i) = y_i$. Vad blir $p(1)$?

x_i	0	2	3
y_i	0	0	1

☐ 0 ☐ -1 ☐ -1/4 ☒ -1/3 ☐ -1/2 ☐ -1/5

4. Modellen $y(x) = \alpha x + \beta x^2$ ska anpassas till punkterna i tabellen nedan i minsta kvadratmening.

x	-1	0	1
y	0	-0.5	4

Det leder till det överbestämda ekvationssystemet $A\mathbf{c} \approx \mathbf{y}$ där kolumnvektorn $\mathbf{c}$ ska bestämmas.

(1 p) a) Vilket ekvationssystem måste man lösa för att bestämma minsta kvadratapproximationen?

☐ $A^\top A\mathbf{c} = \mathbf{y}$ ☐ $\frac{1}{2}AA^\top \mathbf{c} = A^\top \mathbf{y}$ ☐ $A^\top A\mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{y}$
☐ $A^\top A\mathbf{c} = A\mathbf{y}$ ☐ $AA^\top \mathbf{c} = A^\top \mathbf{y}$ ☒ $A^\top A\mathbf{c} = A^\top \mathbf{y}$

(2 p) b) Vad blir α och β ?

☐ $\alpha = 5/2$ och $\beta = 5/2$ ☒ $\alpha = 2$ och $\beta = 2$
☐ $\alpha = 1/2$ och $\beta = 1/2$ ☐ $\alpha = 0$ och $\beta = 1$
☐ $\alpha = 1$ och $\beta = 3/4$ ☐ $\alpha = 4$ och $\beta = 4$
☐ $\alpha = 1$ och $\beta = 0$ ☐ $\alpha = 4$ och $\beta = 2$

(2 p)

5. Vilka utsagor är rätt och vilka är fel?

(Poängsättning: 1-4 korrekta svar = 0 p, 5-6 korrekta svar = 2 p.)

a) Intervallhalvering är en effektiv metod för att lösa integraler.☐ rätt☒ fel**b)** Noggrannhetsordningen för trapetsregeln är två.☒ rätt☐ fel**c)** Fixpunktiterationer konvergerar alltid om startgissningen är tillräckligt bra.☐ rätt☒ fel**d)** Vi använder Framåt Euler för att lösa begynnelsevärdesproblemet $y'(t) = -y(t)$ i intervallet $t \in [0, 5]$ med startvärdet $y(0) = -1$. Ju kortare steglängd vi tar, desto större blir tidsåtgången.☒ rätt☐ fel**e)** Implicita metoder lämpar sig för styva problem.☒ rätt☐ fel**f)** Oscillationer som uppstår vid interpolation med polynom av högt gradtal kallas för Richardsons fenomen.☐ rätt☒ fel

(2 p)

6. En numerisk kvadraturmetod har använts för att beräkna en integral. Tabellen nedan visar felet e_h vid steglängd h

h	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
e_h	$1.6 \cdot 10^{-1}$	10^{-2}	$6.23 \cdot 10^{-4}$	$3.89 \cdot 10^{-5}$

Vilken noggrannhetsordning har metoden?

☐ 1☐ 2☐ 3☒ 4☐ 5☐ 6

- (2 p) 7. En iterativ metod har använts till att lösa den icke linjära ekvationen $f(x) = 0$. Tabellen nedan visar felet e_k vid iteration k

k	1	2	3
e_k	$1.41 \cdot 10^{-1}$	$7.05 \cdot 10^{-2}$	$3.52 \cdot 10^{-2}$

Vilken konvergensordning har metoden?

☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

- (2 p) 8. Differentialekvationen

$$y'' - 4yy' = e^t, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 0$$

ska skrivas om som ett system av första ordningen. Vilket av nedanstående system är en korrekt omskrivning av differentialekvationen?

☒ $\begin{cases} u_1' = u_2, & u_1(1) = 3 \\ u_2' = 4u_1u_2 + e^t, & u_2(1) = 0 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} u_1' = u_2, & u_1(1) = 3 \\ u_2' = 4u_1' u_2' + e^t, & u_2(1) = 0 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} u_1' = u_1, & u_1(1) = 3 \\ u_2' = 4u_1 u_2' + e^t, & u_2(1) = 0 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} u_1' = u_2, & u_1'(1) = 3 \\ u_2' = 4u_1 u_2 + e^t, & u_2'(1) = 0 \end{cases}$

- (2 p) 9. Funktionen nedan är given.

```
function y = foo(x, a)
for k=-1:0
    b=x-k;
    while (x > -2) && (x < 2)
        x=x+a+1;
    end
end
y = b + x;
end
```

Resultatet av anropet `foo(-1, 10)` blir

☐ -11 ☐ -2 ☐ 3 ☐ 10
☐ -1 ☐ 0 ☐ 6 ☒ 20