

TENTAMEN I VEKTORANALYS
SI1146 och SI1140 Del 1, VT18

Torsdagen 31 maj 14:00-19:00

Anteckna på varje blad: Namn, utbildningslinje, årskurs och problemnummer.

Tillåtna hjälpmedel: Formelblad som delas ut. Räknedosa ej tillåten!

Examinator: Edwin Langmann (Epost: langmann@kth.se)

Bonuspoängen från kursomgången VT18 adderas till första uppgiften, dock max 6 poäng totalt.

Lösningar: Kommer att finnas på KTH canvas (Extentor).

Poäng: Varje uppgift kan ge 6 poäng. Betygsgränserna finns på KTH social (kurs-PM).

Motivera utförligt! Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

Notation: (x, y, z) är kartesiska koordinater, och $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ är Ortsvektorn. (ρ, θ, z) är cylinderkoordinater definierade genom $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. (r, θ, φ) är sfäriska koordinater definierade genom $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

1. (a) Beräkna uttrycket $\Delta[(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r})]$ med hjälp av indexräkning ($\mathbf{a}$ =konstant vektorfält). (3p)

(b) Förenkla vektoruttrycket $\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u})$ med hjälp av indexräkning. *Ledning:* Resultatet som skall härledas är $c_1 \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + c_2(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + c_3(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ med vissa konstanter c_1, c_2, c_3 . $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är deriverbara vektorfält. (3p)

2. (a) Beräkna integralen

$$\oiint_S U d\mathbf{S} \quad (d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS)$$

där S är randytan till cylindern $x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq R$ där $\hat{\mathbf{n}}$ pekar utåt, och $U = 2x - 3y + 5z$ är ett skälrfält; $R > 0$ är en konstant. *Ledning:* Använd en integralsats. (4p)

(b) Visa att epsilon-symbolen ϵ_{ijk} definierar en isotrop tensor, dvs. en tensor som har samma komponenter, $\epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk}$, i alla högersystem. (2p)

3. (a) Transformera vektorfältet $\mathbf{u} = (x+y)\mathbf{e}_x + (y-x)\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ till sfäriska koordinater r, θ, φ ! *Ledning:* Du kan använda att $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{e}_\varphi = (-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y)/\rho$. (2p)

(b) Visa att vektorfältet $\mathbf{B} = B_0 r \mathbf{e}_\varphi$ har en vektorpotential $\mathbf{A}$ ($B_0 > 0$ är en konstant). Beräkna en vektorpotential $\mathbf{A}$ till $\mathbf{B}$ som uppfyller $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{A} = \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{A} = 0$. (2p)

(c) För vilka värden på konstanten n uppfyller skalärfältet¹ $U(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|^n$ den biharmoniska ekvationen $\Delta\Delta U = 0$? (2p)

¹ $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

4. $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är godtyckliga vektorfält. Är följande påståenden korrekt? Om ja, bevisa det. Om inte, rätta till och bevisa det. (2+2+2p)

- (a) $\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ är lika med $\mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$
 (b) Om $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0}$ så är $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}$ lika med $\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})$.
 (c) Om $\mathbf{A} = k \operatorname{rot} \mathbf{B}$, $\mathbf{B} = k \operatorname{rot} \mathbf{A}$ och $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, så gäller $\Delta \mathbf{B} = 0$ (k konstant).

5. Maxwell-ekvationerna lyder

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

där $\mathbf{E}$ är elektriska fältet, $\mathbf{B}$ magnetfältet, $\mathbf{J}$ strömtätheten, ρ laddningstätheten, c ljusets hastighet, och t tiden. Som vi diskuterade i föreläsningen kan två av Maxwells ekvationer lösas genom att introducera en vektorpotential $\mathbf{A}$ och en skalärpotential Φ så att

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi.$$

- (a) Visa att, om man väljer $\mathbf{A}$ och Φ så att

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0,$$

så uppfyller Φ och $\mathbf{A}$ en inhomogen vågekvation. *Ledning:* "Fältet U uppfyller inhomogena vågekvationen" betyder att $\frac{\partial^2}{\partial t^2} U - c^2 \Delta U = k$ där k är ett fält av samma typ (skalär eller vektor) som U .

- (b) Betrakta specialfallet $\rho = 0$, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, och anta att $\Phi(\mathbf{r}, t) = f(u, v) \cos(\omega t)$ oberoende av z , där (u, v, z) är paraboliska koordinater

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \quad y = uv, \quad z = z$$

(denna ansats motiveras t.ex. med vissa symmetriargument som vi inte bryr oss om här). Härled partiella differentialekvationerna som funktionen $f(u, v)$ måste uppfylla om Φ skall uppfylla vågekvationen i (a)!

Ledning: Paraboliska koordinater är ortogonala och $h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}$. (6p)

6. Du skall ställa upp och lösa en modell för stationära temperaturen $T(\mathbf{r})$ inom ett sfäriskt område $R_1 \leq r \leq R_2$ ($R_1 > 0$ och $R_2 > R_1$ är konstanter; modellen beskriver, t.ex., temperaturen inom jordklotet utanför jordens inre kärna).

Värmeströmmen $\mathbf{j}$ är proportionell mot gradienten av temperaturen (Fouriers lag), och det finns inga värmekällor (dvs. $\mathbf{j}$ är divergensfritt). Temperaturen $T(\mathbf{r})$ vid inre randen $r = R_1$ (som kallas randtemperaturen och betecknas med $T|_{r=R_1}$) är fixerad och lika med T_1 . Vid randen $r = R_2$ gäller Newtons avkylningslag, dvs., normalkomponenten av värmeströmmen är proportionellt mot skillnaden mellan randtemperaturen $T|_{r=R_2}$ och den konstanta omgivningstemperaturen T_2 . *Ledningar:* Ställ upp ekvationerna och beräkna $T(\mathbf{r})$. Inför själv konstanter du behöver! Temperaturen beror bara på r . (6p)

LYCKA TILL!

Formelblad Vektoranalys

Följande formler gäller i ett ortogonalt, kroklinjigt koordinatsystem med koordinaterna u_1, u_2, u_3 , basvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ och skalfaktorerna h_1, h_2, h_3 :

- $d\mathbf{r} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3$
- $\text{grad } \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \mathbf{e}_3$
- $\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$
- $\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$
- $\text{div grad } \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right) \right]$

där A_1, A_2 och A_3 är de kroklinjiga komponenterna av vektorfältet $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3.$$

Specialfall

Cylinderkoordinater: $h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1.$

Sfäriska koordinater: $h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.$

ϵ - δ -relationen (tensornotation)

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

Stokes sats (tensornotation)

$$\iint_S \epsilon_{rst} \frac{\partial A_{jk\dots}}{\partial x_t} dS_s = \oint_C A_{jk\dots} dx_r$$

Gauss sats (tensornotation)

$$\iiint_V \frac{\partial A_{jk\dots}}{\partial x_i} dV = \oiint_S A_{jk\dots} dS_i$$

Lösningföreslag tentamen SI1146 och SI1140 Del 1, 31 maj 2018

- (a) Hemtal 3, Uppgift 3b). (b) Hemtal 3, Uppgift 3.2(b) (Lösningföreslag till Hemtal 3 finns på canvas).
- (a) Gauss sats ger ($\mathbf{e}_i$ är enhetsvektorer i ett kartesisk koordinatsystem)

$$\mathbf{e}_i \cdot \oint_S U d\mathbf{S} = \mathbf{e}_i \cdot \oint_S U d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{e}_i U d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{e}_i U) dV = \mathbf{e}_i \iiint_V \nabla U dV,$$

dvs.

$$\oint_S U d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla U dV = \iiint_V (2\mathbf{e}_x - 3\mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z) dV = (2\mathbf{e}_x - 3\mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z)V$$

där $V = R^2\pi R = R^3\pi$ är cylinders volymen. Svar: $\boxed{(2\mathbf{e}_x - 3\mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z)R^3\pi}$

(b) Anta att ϵ_{ijk} är komponenter av tensorn i koordinatsystemet K, och $L_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$ är transformationsmatrisen till ett annat högersystem. Transformationsregeln för tensorer ger då komponenterna ϵ'_{ijk} av tensorn i koordinatsystemet K',

$$\epsilon'_{ijk} = L_{il}L_{jm}L_{kn}\epsilon_{lmn}. \quad (1)$$

Detta och definitionen av ϵ_{ijk} ger

$$\epsilon'_{123} = L_{1l}L_{2m}L_{3n}\epsilon_{lmn} = \det(L) = 1 = \epsilon_{123}$$

där $L = (L_{ij})$ (3×3 matris). ($\det(L) = 1$ följer från $LL^T = I \Rightarrow \det(LL^T) = 1 = \det(L)^2 \rightarrow \det(L) = 1$ (+1 därför att K' är ett högersystem). (1) och $\epsilon_{lmn} = \epsilon_{nlm} = -\epsilon_{mnl}$ ger $\epsilon'_{ijk} = \epsilon'_{jki} = -\epsilon'_{jik}$, som visar att $\epsilon'_{ijk} = \epsilon_{ijk}$. v.s.v.

- (a)

$$\mathbf{u} = \underbrace{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}_{=\mathbf{r}} - \underbrace{(-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y)}_{=r\mathbf{e}_\varphi} = \boxed{r\mathbf{e}_r - r\sin\theta\mathbf{e}_\varphi},$$

dvs. $u_r = r$, $u_\theta = 0$, $u_\varphi = -r\sin\theta$.

(b) $\mathbf{B}$ har ett vektorpotential $\mathbf{A} = A_\theta\mathbf{e}_\theta$ om $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Vi beräkna

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2\sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r\sin\theta\mathbf{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ 0 & rA_\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r^2\sin\theta} (-\mathbf{e}_r\partial_\varphi(rA_\theta) + r\sin(\theta)\mathbf{e}_\varphi\partial_r(rA_\theta)) = \mathbf{B} = B_0r\mathbf{e}_\varphi \end{aligned}$$

som ger

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\partial_r(rA_\theta) &= B_0r \Rightarrow A_\theta = \frac{1}{3}B_0r^2 + f(\theta, \varphi) \\ \partial_\varphi(rA_\theta) &= r\partial_\varphi f(\theta, \varphi) = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ (t.ex.)}. \end{aligned}$$

Detta visa att $\mathbf{A} = \frac{1}{3}B_0r^2\mathbf{e}_\theta$ är ett vector potential till $\mathbf{B}$.

(c)

$$\begin{aligned}\Delta\Delta U &= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)r^n = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)\frac{1}{r^2}\partial_rnr^{n+1} \\ &= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r)n(n+1)r^{n-2} = \frac{1}{r^2}\partial_rn(n+1)(n-2)r^{n-1} = n(n+1)(n-2)(n-1)r^{n-4} = 0\end{aligned}$$

ger lösningar $n = 2, \quad n = 1, \quad n = 0, \quad n = -1$.

4. (a) Ja. Bevis:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \partial_i\epsilon_{ijk}A_jB_k = \epsilon_{ijk}(\partial_iA_j)B_k + \epsilon_{ijk}A_j\partial_iB_k = B_k\epsilon_{kij}\partial_iA_j \\ &= -A_j\epsilon_{jik}\partial_iB_k = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}\end{aligned}$$

v.s.v.

(b) Nej. Sant är att $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} = \frac{1}{2}\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})$ om $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0}$. Bevis: $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0} \Rightarrow \partial_iA_j = \partial_jA_i$. Detta ger

$$[(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A}]_i = A_j\partial_jA_i = A_j\partial_iA_j = \frac{1}{2}\partial_i(A_jA_j) = [\frac{1}{2}\operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})]_i$$

v.s.v.

(c) Nej. Rätt är att $\Delta\mathbf{B} = -k^{-2}\mathbf{B}$. Bevis:

$$\Delta\mathbf{B} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -k^{-1}\operatorname{rot} \mathbf{A} = -k^{-2}\mathbf{B}.$$

v.s.v.

5. (a) Fjärde Maxwell-ekvation ger

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{E} &= \underbrace{\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})}_{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta^2\mathbf{A}} - \frac{1}{c}\partial_t\left(\underbrace{-\frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A} - \nabla\Phi}_{(c)^{-2}\partial_t^2\mathbf{A} + c^{-1}\nabla(\partial_t\Phi)}\right) \\ &= c^{-2}\partial_t^2\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} + \nabla(\underbrace{c^{-1}\partial_t\Phi + \nabla \cdot \mathbf{A}}_{=0}) = \frac{1}{c}\mathbf{J}\end{aligned}$$

dvs.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A} - c^2\Delta\mathbf{A} = c\mathbf{J}.$$

Första Maxwell-ekvation ger

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-c^{-1}\partial_t\mathbf{A} - \nabla\Phi) = -c^{-1}\partial_t(\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{A} + c^{-1}\partial_t\Phi}_{=0}) - c^{-2}\partial_t^2\Delta\Phi = \rho$$

dvs.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi - c^2\Delta\Phi = c^2\rho. \quad (2)$$

(b) $\rho = 0$ och $\Phi = f(u, v) \cos(\omega t)$, och (2) ovan ger $(-\omega^2 - c^2 \Delta^2) f(u, v) \cos(\omega t) = 0$, dvs.

$$\Delta f(u, v) + (\omega/c)^2 f(u, v) = 0.$$

Vi transformerar Δ till paraboliska koordinater (enl. formelbladet):

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{1}{h_u h_v h_z} \left(\partial_u \left(\frac{h_v h_z}{h_u} \partial_u f \right) + \partial_v \left(\frac{h_z h_u}{h_v} \partial_v f \right) + \partial_z \left(\frac{h_u h_v}{h_z} \partial_z f \right) \right)$$

lika med $\frac{1}{u^2+v^2}(\partial_u^2 + \partial_v^2)f$ (OBS att $h_z = 1$ och $\partial_z f = 0$). Svar:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial u^2} f(u, v) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} f(u, v) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (u^2 + v^2) f(u, v) = 0.} \quad (3)$$

Anmärkning: PDEn i (3) som kan lösas ganska enkelt. Uppgiften ger ett typisk exempel om hur kunskap från kursen används i praktiken.

6. $\mathbf{j} = -\lambda \nabla T$ (Fouriers lag) och $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ (kontinuitetsekvation om $\partial T / \partial t = 0$) ger

$$\Delta T = 0.$$

Symmetri av problemet $\Rightarrow T = T(r)$, $\mathbf{j} = -\lambda \operatorname{grad} T = -\lambda T'(r) \mathbf{e}_r$. Randvillor vid $r = R_1$: $T(R_1) = T_1$. Randvillkor vid randen $\rho = R_2$:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j}|_{r=R_2} = -\alpha(T_2 - T(R_2))$$

där normalderivatan $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j}|_{r=R_2}$ är lika med $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j}|_{r=R_2} = -\lambda T'(R_2)$.

Problemet lyder alltså (vi använder Δ i sfäriska koordinater enligt formelbladet)

$$\frac{1}{r^2} (\partial_r r^2 \partial_r T(r)) = 0, \quad T(R_1) = T_1, \quad -\lambda T'(R_2) = -\alpha(T_2 - T(R_2)).$$

Lösning av ODE:

$$\frac{1}{r} (\partial_r r^2 \partial_r T(r)) = 0 \Rightarrow (\dots) \Rightarrow T(r) = c_1 + c_2 r^{-1}$$

med integrationskonstanter c_1, c_2 .

Randvillkoret vid $r = R_1$ ger $c_1 + c_2/R_1 = T_1 \Rightarrow c_1 = T_1 - c_2/R_1$. Randvillkoret vid $r = R_2$ ger

$$\lambda c_2 \frac{1}{R_2^2} = -\alpha(T_2 - T_1 + c_2/R_1 - c_2/R_2) \Rightarrow c_2 = -\frac{T_2 - T_1}{\lambda/\alpha R_2^2 + 1/R_1 - 1/R_2}$$

Svar:

$$\boxed{T(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\lambda/\alpha R_2^2 + 1/R_1 - 1/R_2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right)}$$