

KTH Teoretisk Fysik

Omtentamen i **Fysikens matematiska metoder**

SI1200; SI1140 Del 2; SI1143

Lördagen den 9 juni 2018 kl 9.00 – 14.00

Anteckna på varje blad: namn, personnummer, och problemnummer.

Tillåtna hjälpmedel: bara formelsamlingen som delas ut

Obs! Miniräknare ej tillåten.

Notera gärna dina **bonuspoäng** på omslaget.

Examinator: Edwin Langmann (Epost: langmann@kth.se)

Lösningar: Kommer att finnas på kurshemsidan,
<https://kth.instructure.com/courses/4568/>

Motivera utförligt! Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

Inför och förklara konstanter och symboler du behöver!

Notation: $u_x(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$; $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$; $x \in \mathbb{R}$ betyder $-\infty < x < \infty$

1. ¹ (a) Beräkna elektriska potentialen $U(r, \theta)$ inom ett homogent metallisk rör med inre radie $R > 0$ och yttre radie $2R$. Potentialen vid ränderna är fixerade,

$$U(R, \theta) = U_0 \sin^2 \theta, \quad U(2R, \theta) = U_0 \cos^2 \theta$$

där $U_0 > 0$ är en konstant. Potentialen uppfyller Laplaces ekvation $\Delta U = 0$. (r, θ, z är cylinderkoordinater: $x = r \cos \theta$ och $y = r \sin \theta$, och röret är så långt att man kan anta att potentialen är oberoende av z .) (4p)

(b) Ange PDE problemet som definierar Greenfunktionen till problemet i 1(a) ovan. *OBS:* Du behöver inte beräkna Greenfunktionen! (2p)

2. (a) Bestäm lösningen $u(x, t)$, $t > 0$ och $0 < x < L$, till följande problem,

$$\rho u_{tt}(x, t) - S u_{xx}(x, t) = 0 \quad (0 < x < L, t > 0)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = A \sin(\omega t) \quad (t > 0)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \quad (0 < x < L)$$

där $A > 0$, $\rho > 0$, $S > 0$, $\omega > 0$, $L > 0$ är konstanter. Du behöver inte beräkna alla integraler för full poäng. (5p) (b) Ange en möjlig fysikalisk tolkning av problemet i (a). (1p)

3. En sfärisk kula med radie R har från början överallt temperaturen T_0 . Den avkyls genom att dess yta från tiden $t = 0$ hålls vid temperaturen $T_0/5$. (a) Beräkna temperaturen inom kulan vid alla tider $t \geq 0$. (5p) (b) Beräkna approximativt tiden då temperaturen i centrum är lika med $T_0/2$. (1p) *Ledning:* Temperaturen $T = T(r, t)$ oberoende av θ och φ . Alla integraler ska beräknas för full poäng. *Ledning:* $\int \sin(kx) x dx = [\sin(kx) - kx \cos(kx)]/k^2$.

¹Dina bonuspoäng från hemtalen under VT2018 adderas till dina poäng i uppgiften 1, dock kan du bara få 6 poäng max.

4. (a) Bestäm lösningen $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$ och $t \geq 0$, till problemet

$$u_t(x, t) - au_{xx}(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_0 e^{-x^2/R^2}$$

där $R > 0$, u_0 och $a > 0$ är konstanter. Anta att $u(x, t) \rightarrow 0$ när $|x| \rightarrow \infty$ för alla $t > 0$. (b) Ange Greenfunktionen till problemet i (a)! (c) Beskriv (i ord) en möjlig situation som kan beskrivas med modellen i (a). Det skall vara möjligt att ställa upp modellen från beskrivningen. (6p)

5. Då vattnet i en rak cirkulär cylinder med radie R roterar med vinkelhastigheten $\omega > 0$ runt cylinderaxeln formar sig ytan så att den potentiella energien U i det roterande systemet blir minimal. Bestäm vattenytans höjd $h(r)$ som funktion av avståndet r från cylinderaxeln! *Ledning:* Bidraget dU till potentiella energin från volymelementet dV är

$$dU = \rho_M \left(gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} \right) dV$$

där $g = 9.82 \text{ m/s}^2$, ρ_M är vattens densitet, och r, φ, z är cylinderkoordinater. Anta att totala vattenvolymen V_0 är så stor att $h(r) > 0$ för alla $0 \leq r \leq R$. Ange eventuella bivillkor. (6p)

6. En elektrisk potential $U(\mathbf{r}, t)$ genereras av en laddningsfördelning

$$\rho_L(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \rho_0 \sin(\omega t) & \text{om } \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

vid tiden $t \in \mathbb{R}$, där $\mathbf{r} = (x, y, z)$ är positionen i kartesiska koordinater; $\rho_0 > 0$, $\omega > 0$ och $a > 0$ är konstanter. Beräkna **en** stationär periodisk lösning $U(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ och $t \in \mathbb{R}$, till problemet! *Ledning:* $U(\mathbf{r}, t)$ uppfyller inhomogena vågekvationen

$$U_{tt} - c^2 \Delta U = \rho_L.$$

OBS att U och U s normalderivata skall vara kontinuerliga vid ytan $\sqrt{x^2 + y^2} = a$, och $U \rightarrow 0$ när $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$. (6p)

LYCKA TILL!

Lösningsföreslag till tentamen i Fysikens matematiska metoder 180609

I TYPED THIS QUICKLY: PLEASE LET ME KNOW BY EMAIL IF YOU FIND ANY MISTAKES/TYPOS. THANKS.

1. (a) Problemet lyder

$$(\Delta U)(r, \theta) = U_{rr}(r, \theta) + \frac{1}{r}U_r(r, \theta) + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}(r, \theta) = 0 \quad (R < r < 2R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$$U(R, \theta) = U_0 \sin^2(\theta) = \frac{1}{2}U_0(1 - \cos 2\theta), \quad U(2R, \theta) = U_0 \cos^2(\theta) = \frac{1}{2}U_0(1 + \cos 2\theta).$$

Allmänna lösningen till PDE i området $R < r < 2R$ är

$$U(r, \theta) = (a_0 + b_0 \ln(r/R)) + \sum_{n=1}^{\infty} (r^n [a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] + r^{-n} [c_n \cos(n\theta) + d_n \sin(n\theta)])$$

med godtyckliga konstanter a_n, b_n, c_n, d_n , och randvillkoren ger

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2}U_0 + \cos(2\theta)[a_2 r^2 + c_2 r^{-2}]$$

där

$$a_2 R^2 + c_2 R^{-2} = -\frac{U_0}{2}, \quad a_2 (2R)^2 + c_2 (2R)^{-2} = \frac{U_0}{2} \Rightarrow a_2 = 1/6R^2, \quad c_2 = -2R^2/3.$$

Svar:
$$U(r, \theta) = U_0(1/2 + [r^2/6R^2 - 2R^2/3r^2] \cos(2\theta))$$

(b) PDE problemet som Bestämmer Greenfunctionen $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\mathbf{r} = (x, y)$ och $\mathbf{r}' = (x', y')$, är

$$-(\Delta_{\mathbf{r}} G)(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (R < |\mathbf{r}| < 2R, \quad R < |\mathbf{r}'| < 2R)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{|\mathbf{r}|=R} = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{|\mathbf{r}|=2R} = 0$$

där $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ osv. (Man kan också skriva det i polära koordinater förstås, men det behövs inte för full poäng.)

2. PDE problemet lyder

$$u_{tt}(x, t) - c^2 u_{xx}(x, t) = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = A \sin(\omega t), \quad u(x, 0) = u_t(x, t) = 0$$

där $c = \sqrt{S/\rho}$. Ansatsen $u_p(x, t) = f(x) \sin(\omega t)$ för en partikulärlösning ger

$$-\omega^2 f(x) - c^2 f''(x) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(L) = A \Rightarrow f(x) = A \frac{\sin(\omega x/c)}{\sin(\omega L/c)}.$$

Resonansfrekvens: $\omega L/c = n\pi$ där $n = 1, 2, \dots \Rightarrow \omega_n = n\pi c/L$. Vi antar att $\omega \neq \omega_n$ dvs. $\sin(\omega L/c) \neq 0$.

Ansatsen $u(x, t) = u_p(x, t) + U(x, t)$ ger

$$U_{tt}(x, t) - c^2 U_{xx} = 0, \quad U(0, t) = U(L, t) = 0, \quad U(x, 0) = 0, \quad U_t(x, 0) = -f(x)\omega$$

med $f(x)$ ovan.

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n x) \sin(k_n c t), \quad a_n = -\frac{\omega}{k_n c} \frac{2}{L} \int_0^L \sin(k_n x) f(x) dx$$

där $k_n = n\pi/L$.

Svar: $u(x, t) = f(x) \sin(\omega t) + U(x, t)$ med $f(x)$ och $U(x, t)$ ovan.

3.

$$T_t(r, t) - \Delta T(r, t) = 0, \quad T(R, t) = T_0/5, \quad T(r, 0) = T_0$$

ger

$$T(r, t) = T_0/5 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{r} \sin(k_n r), \quad k_n = n\pi/R \Rightarrow a_n = \frac{2}{R} \int_0^R \frac{4T_0}{5} \sin(k_n r) r dr.$$

Svar:

$$T(r, t) = \frac{1}{5}T_0 + \frac{8}{5}T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{k_n} \frac{1}{r} \sin(k_n r), \quad k_n = n\pi/R$$

4. (a) Fourier transformen

$$U(k, t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-ikx} dx$$

ger

$$U_t(k, t) + ak^2 U(k, t) = 0, \quad U(k, 0) = \int_{\mathbb{R}} u_0 e^{-x^2/R^2} e^{-ikx} dx = u_0 R \sqrt{\pi} e^{-k^2 R^2/4}$$

(integralen ges i formelsamlingen) som har lösningen

$$U(k, t) = U(k, 0) e^{-ak^2 t} = u_0 R \sqrt{\pi} e^{-k^2(R^2+4at)/4}.$$

Inversa Fourier transformen ger svaret:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} U(k, t) e^{ikx} dk = \frac{u_0 R \sqrt{\pi}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-k^2(R^2+4at)/4} e^{ikx} dk$$

dvs. (integralen ges i formelsamlingen)

$$u(x, t) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 4at}} u_0 e^{-x^2/(R^2+4at)}.$$

(b) Greensfunktionen $G(x, t, x', t')$ bestäms av problemet

$$G_t(x, t, x', t') - aG_{xx}(x, t, x', t') = \delta(t - t')\delta(x - x'), \quad G(x, 0, x', t') = 0$$

som har lösningen

$$G(x, t, x', t') = \Theta(t - t') \frac{1}{\sqrt{4\pi a(t - t')}} e^{-(x-x')^2/4a(t-t')}$$

med Heavisidefunktionen Θ (fundamentallösningen $G_0(x, t)$ så att $G(x, t, x', t') = \Theta(t - t')G_0(x - x', t - t')$ finns i formelsamlingen).

(c) Värmeledning i en isolerad homogen stav som är så lång att randeffekterna kan ignoreras: $u(x, t)$ är temperaturen i positionen x och vid tiden t som uppfyller den en-dimensionella värmeledningsekvation. Temperaturen vid tiden $t = 0$ är lika med $u_0 e^{-x^2/R^2}$. (Det är en möjlig svar; det finns många andra.)

5. Vattenvolymen V definieras genom $0 \leq r \leq R$, $0 \leq z \leq h(r)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ i cylinder koordinater r, θ, z , dvs.

$$U = 2\pi \int_0^R r dr \int_0^{h(r)} dz \rho_M \left(gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} \right) = 2\pi \rho_M \int_0^R dr \left(g \frac{1}{2} r h(r)^2 - \frac{1}{2} \omega^2 r^3 h(r) \right),$$

och vi har ett villkor att volymen

$$V = 2\pi \int_0^R r dr \int_0^{h(r)} dz = 2\pi \int_0^R dr r h(r)$$

är fixerad och like med V_0 . Problemet lyder: bestäm $h(r)$ så att U är minimum med bivillkoret $V = V_0$. Lösningen är att bestämma extremum till funktionalen $U - \lambda V = 2\pi \int dr F(h(r))$ med Lagrange multiplikatorn λ och

$$F(h(r)) = \rho_M \left(g \frac{1}{2} r h(r)^2 - \frac{1}{2} \omega^2 r^3 h(r) \right) - \lambda r h(r).$$

Euler-Lagrange ekvationen är (p.g.a. $\partial F / \partial h'(r) = 0$)

$$\frac{\partial F}{\partial h(r)} = \rho_M (grh(r) + \frac{1}{2} \omega^2 r^3) - \lambda r = 0 \Rightarrow h(r) = \frac{\lambda - \rho_M \omega^2 r^2 / 2}{\rho_M g}$$

där λ bestäms genom

$$V_0 = 2\pi \int_0^R dr r \frac{\lambda - \rho_M \omega^2 r^2 / 2}{\rho_M g} = \frac{2\pi}{\rho_M g} \left(\frac{1}{2} \lambda R^2 - \frac{1}{8} \rho_M \omega^2 R^4 \right) \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4} \rho_M \omega^2 R^2 + \frac{V_0 \rho_M g}{\pi R^2}.$$

Svar:

$$h(r) = \frac{\omega^2 (R^2 - 2r^2)}{4g} + \frac{V_0}{\pi R^2}.$$

[Kolla att dimensionerna stämmer: $[h(r)] = L$, $[V_0/R^2] = L$ OK, $[\omega^2 R^2/g] = T^{-2}L^2/(L/T^2) = L$ OK.]

6. Problemet lyder

$$U_{tt}(\mathbf{r}, t) - c^2 \Delta U(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t), \quad U(\mathbf{r}, 0) = U_t(\mathbf{r}, 0) = 0.$$

Ansatsen $U_p(\mathbf{r}, t) = f(r) \sin(\omega t)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, för en partikulärlösning till PDE ger

$$-\omega^2 f(r) - c^2 \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r f(r)) = \begin{cases} \rho_0 & r < a \\ 0 & r > R \end{cases}$$

som har en lösning

$$f(r) = \begin{cases} -\rho_0/\omega^2 & r < a \\ A J_0(\lambda r) + B Y_0(\lambda r) & r > R \end{cases}$$

där $\lambda = \omega/c$ och där A och B bestäms så att $f(r)$ och $f'(R)$ är kontinuerliga vid $r = R$ (enl. ledningen) dvs.

$$A J_0(\lambda R) + B Y_0(\lambda R) = -\rho_0/\omega^2, \quad A \lambda J'_0(\lambda R) + B \lambda Y'_0(\lambda R) = 0.$$

Svar: $U(r, t) = f(r) \sin(\omega t)$ med $f(r)$ ovan och

$$A = -\frac{\rho_0 Y'_0(\lambda R)}{\omega^2 (J_0(\lambda R) Y'_0(\lambda R) - Y_0(\lambda R) J'_0(\lambda R))}, \quad B = \frac{\rho_0 J'_0(\lambda R)}{\omega^2 (J_0(\lambda R) Y'_0(\lambda R) - Y_0(\lambda R) J'_0(\lambda R))}.$$