

OMTENTAMEN I VEKTORANALYS
SI1146 och SI1140 Del 1, VT18

Onsdagen 15 augusti 08:00-13:00

Anteckna på varje blad: Namn, utbildningslinje, årskurs och problemnummer.

Tillåtna hjälpmedel: Formelblad som delas ut. Räknedosa ej tillåten!

Examinator: Edwin Langmann (Epost: langmann@kth.se)

Bonuspoängen från kursomgången VT18 adderas till första uppgiften, dock max 6 poäng totalt.

Lösningar: Kommer att finnas på KTH canvas (Extentor).

Poäng: Varje uppgift kan ge 6 poäng. Betygsgränserna finns på KTH social (kurs-PM).

Motivera utförligt! Otillräckliga motiveringar kan medföra poängavdrag.

Notation: (x, y, z) är kartesiska koordinater, och $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ är Ortsvektorn. (ρ, θ, z) är cylinderkoordinater definierade genom $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. (r, θ, φ) är sfäriska koordinater definierade genom $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

1. (a) Låt $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) vara enhetsvektorerna som definierar koordinataxlarna i ett kartesiskt koordinatsystem K , och $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_3 = \frac{3}{5}\mathbf{e}_1 - \frac{4}{5}\mathbf{e}_3$ och $\mathbf{e}'_1$ enhetsvektorer som definierar koordinataxlarna i ett annat kartesiskt koordinatsystem K' som är ett högersystem. Beräkna transformationsmatrisen L_{ij} från koordinatsystemet K till K' . *Ledning:* Börja med att beräkna $\mathbf{e}'_1$. (3p)
(b) En tensor definieras i kartesiska koordinatsystemet K genom komponenterna $T_{13} = 2$, $T_{31} = 1$, $T_{ij} = 0$ annars. Beräkna komponenterna T'_{ij} av tensorn i koordinatsystemet K' ! (3p)
2. (a) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{A} = L^{-3}\mathbf{r} + |\mathbf{r}|^{-3}\mathbf{r}$ ut ur kuben som definieras genom $-L \leq x \leq L$, $-L \leq y \leq L$ och $-L \leq z \leq L$, där $L > 0$ är en konstant ($|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$). (3p)
(b) Visa att vektorfältet

$$\mathbf{v} = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^4} \mathbf{e}_r + \frac{\sin 2\theta}{r^4} \mathbf{e}_\theta$$

har en skalär potential f i området $r > 0$. Beräkna f ! (3p)

3. $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är godtyckliga vektorfält. Är följande påstående korrekt? Om ja, bevisa det. Om inte, rätta till det och bevisa det rättade resultat. (2+2+2p)
 - (a) $\text{div rot } \mathbf{A}$ är lika med $\text{grad div } \mathbf{A}$.
 - (b) $\delta_{ij}\epsilon_{jkl}\delta_{km}\delta_{ml}$ är lika med 3.
 - (c) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ är lika med $\mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$.

4. Paraboliska koordinater (u, v, w) , som är ortogonala, är relaterade till kartesiska koordinater x, y, z genom följande ekvationer,

$$x = 2uv, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = w.$$

- (a) Beräkna skalfaktorerna h_u, h_v, h_w och enhetsvektorerna $\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w$. (2p)
 (b) Transformera vektorfältet $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_y$ till paraboliska koordinater. (2p)
 (c) Låt $\mathbf{A} = u\sqrt{u^2 + v^2}\mathbf{e}_u + v\sqrt{u^2 + v^2}\mathbf{e}_v + w\mathbf{e}_w$. Beräkna $\text{div } \mathbf{A}$. (2p)
5. Beräkna magnetfältet $\mathbf{B}$ som genereras av elektriska strömtätheten $\mathbf{j} = \mathbf{e}_z f(\rho)$ där $f(\rho) = J/(R^2\pi) > 0$ om $0 \leq \rho < R$ och $f(\rho) = 0$ om $\rho > R$; $R > 0$ och $J > 0$ är konstanter, och $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ledning: Magnetfältet uppfyller Maxwell ekvationer

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

6. Vi betraktar en modell av diffusion av ett ämne inom ett område $V : R < r < 2R$, där $R > 0$ är en konstant ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).
- (a) Skriv ner ekvationerna som ger en matematisk beskrivning av följande tre punkter. Inför själv och förklara symboler du kanske behöver!
- (i) Diffusionsströmtätheten $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ av ett ämne i punkten $\mathbf{r}$ inom V är parallel med riktningen där koncentrationen $c(\mathbf{r})$ av ämnet minskar snabbast, och beloppet av $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ är proportionell mot ändringen av koncentrationen i denna riktning.
- (ii) Flödet av diffusionsströmtätheten $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ ut ur en godtycklig delvolym inom området V är noll.
- (iii) Koncentrationen $c(\mathbf{r})$ vid randytorna $r = R$ och $2R$ till området V är lika med c_1 och c_2 , respektive; $c_1 > 0$ och $c_2 > 0$ är konstanter.
- (b) Beräkna koncentrationen $c(\mathbf{r})$ av ämnet som beskrivs i (a)! *Ledning:* Lös PDE-problemet som du får genom att lösa uppgiften (a) ovan. (6p)

LYCKA TILL!

Formelblad Vektoranalys

Följande formler gäller i ett ortogonalt, kroklinjigt koordinatsystem med koordinaterna u_1, u_2, u_3 , basvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ och skalfaktorerna h_1, h_2, h_3 :

- $d\mathbf{r} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3$
- $\text{grad } \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \mathbf{e}_3$
- $\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$
- $\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$
- $\text{div grad } \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right) \right]$

där A_1, A_2 och A_3 är de kroklinjiga komponenterna av vektorfältet $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3.$$

Specialfall

Cylinderkoordinater: $h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1.$

Sfäriska koordinater: $h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.$

ϵ - δ -relationen (tensornotation)

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

Stokes sats (tensornotation)

$$\iint_S \epsilon_{rst} \frac{\partial A_{jk\dots}}{\partial x_t} dS_s = \oint_C A_{jk\dots} dx_r$$

Gauss sats (tensornotation)

$$\iiint_V \frac{\partial A_{jk\dots}}{\partial x_i} dV = \oiint_S A_{jk\dots} dS_i$$

Lösningsföreslag tentamen SI1146 och SI1140 Del 1, 15 augusti 2018

1. (a) $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}'_2 \times \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_2 \times (\frac{3}{5}\mathbf{e}_1 - \frac{4}{5}\mathbf{e}_3) = -\frac{3}{5}\mathbf{e}_3 - \frac{4}{5}\mathbf{e}_1$ ger $L_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j$,

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

- (b) $T'_{ij} = L_{ik}L_{jm}T_{km} = (LTL^T)_{ij}$ där

$$L = (L_{ij}), \quad T = (T_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L^T = (L^T_{ij}) = (L_{ji}).$$

Detta ger

$$\begin{aligned} (T'_{ij}) &= L \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & +\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & 0 & -\frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 36 & 0 & 23 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -36 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. (a) $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ där $\mathbf{A}_1 = L^{-3}\mathbf{r}$ och $\mathbf{A}_2 = |r|^{-3}\mathbf{r}$.

$$\oint_S \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A}_1 dV = L^{-3}3(2L)^3 = 24$$

med Gauss sats, och

$$\oint_S \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{S} = 4\pi$$

(standard integral som löstes flera gånger under kursens gång; full poäng kräver att du förklara detta mer än jag gör här).

Svar: $24 + 4\pi$.

- (b) Om $\partial_\varphi f = 0$,

$$\operatorname{grad} f = \partial_r f \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta f \mathbf{e}_\theta = \mathbf{v} \Rightarrow$$

$$\partial_r f = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^4} = -\partial_r \frac{\cos^2 \theta - 1/3}{r^3} \Rightarrow f = -\frac{\cos^2 \theta - 1/3}{r^3} + g(\theta).$$

$$\frac{1}{r} \partial_\theta f = \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^4} + g'(\theta) = \frac{\sin 2\theta}{r^4} + g'(\theta)$$

$\Rightarrow \mathbf{v} = \operatorname{grad} f$ där $\boxed{f = -\frac{\cos^2 \theta - 1/3}{r^3}}$. (Detta visa också att $\mathbf{v}$ har en skalär potential.)

3. (a) Fel. $\text{div rot } \mathbf{A} = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0$.
 (b) Fel. $\delta_{ij} \epsilon_{jkl} \delta_{km} \delta_{ml} = \epsilon_{ikk} = 0$.
 (c) Korrekt. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\dots) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$.
 (Flera detaljer än $(\dots)$ krävs för full poäng.)

4. (a)

$$\partial_u \mathbf{r} = (2v, 2u, 0) \Rightarrow h_u = 2\sqrt{u^2 + v^2}, \quad \mathbf{e}_u = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}(v, u, 0)$$

$$\partial_v \mathbf{r} = (2u, -2v, 0) \Rightarrow h_v = 2\sqrt{u^2 + v^2}, \quad \mathbf{e}_v = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}(u, -v, 0)$$

$$\partial_w \mathbf{r} = (0, 0, 1) \Rightarrow h_w = 1, \quad \mathbf{e}_w = (0, 0, 1).$$

$$(b) v_u = \mathbf{e}_u \cdot 2uv(0, 1, 0) = 2u^2v/\sqrt{u^2 + v^2}, v_v = \mathbf{e}_v \cdot 2uv(0, 1, 0) = -2uv^2/\sqrt{u^2 + v^2}, \\ v_w = \mathbf{e}_w \cdot 2uv(0, 1, 0) = 0$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} 2uv(u\mathbf{e}_u - v\mathbf{e}_v)$$

(c)

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{4(u^2 + v^2)} (\partial_u(2u(u^2 + v^2)) + \partial_v(2v(u^2 + v^2)) + \partial_w 4(u^2 + v^2)w)$$

$$= \frac{1}{4(u^2 + v^2)} (6u^2 + 2v^2 + 2u^2 + 6v^2 + 4u^2 + 4v^2) = 3$$

5. Ansatsen

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho + B_\phi(\rho)\mathbf{e}_\phi + B_z(\rho)\mathbf{e}_z \quad (1)$$

ger

$$\text{div}(\mathbf{B}) = \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho B_\rho(\rho)) \quad (2)$$

och

$$\text{rot}(\mathbf{B}) = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \partial_\rho & \partial_\phi & \partial_z \\ B_\rho(\rho) & \rho B_\phi(\rho) & B_z(\rho) \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_\phi \partial_\rho(B_z(\rho)) + \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho B_\phi(\rho)). \quad (3)$$

Med $\mathbf{j} = f(\rho)\mathbf{e}_z$ och Maxwell ekvationer,

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho B_\rho(\rho)) = 0, \quad \partial_\rho(B_z(\rho)) = 0, \quad \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho B_\phi(\rho)) = f(\rho). \quad (4)$$

Detta ger

$$\partial_\rho(\rho B_\rho(\rho)) = 0 \Rightarrow \rho B_\rho(\rho) = c_0 \Rightarrow B_\rho(\rho) = \frac{c_0}{\rho}$$

och

$$\partial_\rho(B_z(\rho)) = 0 \Rightarrow B_z(\rho) = c_1$$

med integrationskonstanter c_1 och c_2 . $\mathbf{B} \rightarrow 0$ där $\rho \rightarrow \infty \Rightarrow c_1 = 0$.

$|\mathbf{B}| < \infty \Rightarrow c_0 = 0$.

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho B_\phi(\rho)) = f(\rho) \Rightarrow \partial_\rho(\rho B_\phi(\rho)) = \rho f(\rho) \Rightarrow B_\phi(\rho) = \frac{c_2}{\rho} + \frac{1}{\rho} \int_0^\rho ds s f(s) \quad (5)$$

$c_2 = 0$ p.g.a. $|\mathbf{B}| < \infty$.

Detta ger

$$B_\phi(\rho) = \begin{cases} J\rho/(2\pi R^2) & 0 \leq \rho < R \\ J/(2\pi\rho) & \rho > R. \end{cases} \quad (6)$$

Svar: $\boxed{\mathbf{B} = B_\phi(\rho)\mathbf{e}_\phi}$ dvs.

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_\phi(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{(-y, x, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (7)$$

6. (a) (i) $\mathbf{J} = -D \text{grad } c$ där $D > 0$ är en konstant.

(ii) $\text{div } \mathbf{J} = 0$

(iii) $c|_{r=R} = c_1, c|_{r=2R} = c_2$

(b) (a) ger PDE problem et $\Delta c = 0$ ($R < r < 2R$) där $c|_{r=R} = c_1$ och $c|_{r=2R} = c_2$.

Rotationssymmetri: $c = c(r)$, $\Delta c = c''(r) + \frac{2}{r}c'(r) = 0$, som har allmänna lösningen $c(r) = C_1 + C_2/r$ med godtyckliga konstanter $C_{1,2}$. Randvillkoren ger

$$C_1 + \frac{C_2}{R} = c_1, \quad C_1 + \frac{C_2}{2R} = c_2 \Rightarrow C_2 = 2R(c_1 - c_2), \quad C_1 = 2c_2 - c_1$$

Svar:

$$\boxed{c(r) = 2c_2 - c_1 + \frac{2R}{r}(c_1 - c_2)}$$