Institutionen för matematik

SF1669 Matematisk och numerisk analys II
Tentamen
Torsdagen den 16 augusti 2018

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Henrik Shahgholian

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Var god vänd!

DEL A

1. Givet funktionen
$$f(x,y) = \ln(x^2 - y^2).$$
a) Bestäm definitionsmängden D för f. Rita även en bild av D. **(1 p)**
b) Bestäm huruvida D är öppen, sluten eller ingetdera. **(1 p)**
c) Har f några kritiska punkter i definitionsmängden D? **(1 p)**
d) Beräkna $f_{xy}(1,0)$. **(1 p)**

2. För reella konstanter a, b betrakta vektorfältet
$$\mathbf{F} = (ay^3 + 3x^2y, 3y^2x + bx^3).$$
(a) För vilka värden på konstanterna a, b finns det en potentialfunktion till $\mathbf{F}$? **(2 p)**
(b) För $a = b = 1$ beräkna linjeintegralen $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där γ_1 är en godtycklig kurva från $(0,2)$ till $(1,1)$. **(2 p)**

3. Antag att kateterna a, b i en rätvinklig triangel är givna som $a = 8 \pm 0.03$ och $b = 6 \pm 0.01$. Uppskatta en felgräns för triangelns hypotenusa. **(4 p)**

Del B

4. Låt
$$f(x,y) = y^3\sqrt{1-x^2-y^2}$$
och D vara det område i planet som ges av
$$D = \{(x,y):\ x \geq 0, \quad x^2+y^2 \leq 1\}.$$
   (a) Bestäm största värdet för f över området D. **(2 p)**
   (b) Beräkna integralen **(2 p)**
$$\iint_D y^3\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy.$$

5. Låt
$$D = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$
   (a) Skriv de rektangulära (x,y,z)-koordinaterna som funktioner av de sfäriska koordinater R,θ,ϕ. Glöm ej intervallen för de nya koordinater. **(1 p)**
   (b) Ange Jacobimatrisen för koordinatbytet från rektangulära (x,y,z)-koordinater till sfäriska koordinater R,θ,ϕ. **(1 p)**
   (c) Beräkna trippelintegralen $\iiint_D z\,dV$. **(2 p)**

6. En numerisk integrationsmetod ger resultatet I_h när steglängden är h. För successivt halverade värden på h ges
$$I_h = 1.6926479311,$$
$$I_{h/2} = 1.6926505354,$$
$$I_{h/4} = 1.6926506955,$$
$$I_{h/8} = 1.6926507054.$$
Felet antas bero snällt på steglängden.
   (a) Vad är noggrannhetsordningen? **(2 p)**
   (b) Ge ett så bra närmevärde som möjligt till felet i $I_{h/8}$. **(2 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Givet ekvationsystemet

$$\begin{cases} xyz + \sin(x+y+z) + x(y+z) & = 1 \\ \cos(xyz) - e^{xyz} + x + y & = \pi/2 \end{cases}$$

(a) Visa att ekvationssystemet har en lösning på formen

$$y = y(x), \qquad z = z(x)$$

i en omgivning av punkten $(\pi/2, 0, 0)$. **(2 p)**

(b) Är $z(x)$ växande eller avtagande som funktion av x i en omgivning av $x = \pi/2$. **(2 p)**

8. Låt C_r vara en cirkel med radien r och centrum i origo, tagen ett varv i positiv led. Sätt

$$I(r) = \int_{C_r} \frac{(y-1)dx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + (y-1)^2}.$$

Beräkna $I(r)$ för alla $r \neq \sqrt{2}$. **(4 p)**

9. Givet ekvationssystemet

$$\sin(x) = y + z + 1,$$
$$\sin(y) = x + z + 2,$$
$$\sin(z) = x + y + 3.$$

Newton methods för system ska användas för att hitta en lösning nära $(x, y, z) = (-2, -1, -1/2)$. Skriv ett Matlabprogram som gör detta. Felen i x-, y- och z-värdena ska alla vara mindre än 10^{-10}. **(4 p)**