Institutionen för matematik

SF1669 Matematisk och numerisk analys II
Tentamen
Tisdagen den 12 mars 2019

Skrivtid: 08:00-13:00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Henrik Shahgholian

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

Del A på tentamen utgörs av de tre första uppgifterna. Till antalet erhållna poäng från del A adderas dina bonuspoäng. Poängsumman på del A kan dock som högst bli 12 poäng. Bonuspoängen beräknas automatiskt. Antal bonuspoäng framgår från resultatsidan.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som främst är till för de högre betygen.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	–	–	–	–

För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är väl presenterad och lätt att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Var god vänd!

DEL A

1. Vi har funktionen $f(x, y) = \ln(x^2 + xy^2 - 4)$.
   a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkt $(1, 2, 0)$. **(2 p)**
   b) Använd resultatet från uppgifterna ovan för att bestämma ett närmevärde till $f(1.01, 1.97)$. **(2 p)**

2. Med (x, y)-koordinater specifieras vilken position på golvet en person befinner sig i. Funktionen $T(x, y) = 5 + x^2 + y^2 - 2x + 4y$ anger temperaturen i position (x, y). Personen befinner sig i position $(2, 3)$.
   (a) Ange i vilken riktning personen ska röra sig för att på snabbast möjliga sätt öka temperaturen. **(2 p)**
   (b) Rita den kurva personen ska följa om denna vill röra sig utan att ändra temperaturen. **(2 p)**

3. Betrakta en cylinder med cirkulär bas. Dess höjd är given som $h = 2.00 \pm 0.06$ och basytans radie som $r = 0.5000 \pm 0.0025$. Uppskatta felgränsen för cylinderns volym. **(4 p)**

Var god vänd!

DEL B

4. Funktionen $f(x,y)$ är kontinuerlig i den slutna enhetsskivan $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ och har ett lokalt maximumvärde i origo $(0,0)$. Vilka av nedanstående påståenden är sanna för alla sådana funktioner f?
   (a) $\nabla f(0,0)$ existerar och är lika med $(0,0)$. **(2 p)**
   (b) Ytan $z = f(x,y)$ har ett (unikt) horisontellt tangentplan i origo. **(1 p)**
   (c) $f(0,0) \geq f(x,y)$ i en omgivning av $(0,0)$ för $(x,y) \neq (0,0)$. **(1 p)**
   För de påståenden som är sanna ska en ordentlig motivering ges. För de påståenden som är falska krävs ett motexempel.

5. Kroppen K begränsas av en kon och en sfär enligt
$$z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}, \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4.$$
   a) Beskriv K i cylindriska koordinater. **(2 p)**
   b) Beräkna **(2 p)**
$$\iiint_K z \, dx \, dy \, dz.$$

6. En integral approximeras med en numerisk kvadraturmetod där olika steglängder h använts. Resultaten I_h approximerar den exakta integralen I. Nedan listas felet i några av dessa värden.

$I_{0.2} - I$	$1.027719065405108 \cdot 10^{-4}$
$I_{0.1} - I$	$0.063819691753508 \cdot 10^{-4}$
$I_{0.05} - I$	$0.003999391928743 \cdot 10^{-4}$
$I_{0.025} - I$	$0.000250039988713 \cdot 10^{-4}$

   Felet antas bero snällt på steglängden.
   (a) Vilken noggrannhetsordning har kvadraturmetoden? **(2 p)**
   (b) Uppskatta hur stort felet $I_{0.01} - I$ skulle vara. **(2 p)**

Var god vänd!

DEL C

7. Låt G vara den övre halvsfären som ges av $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ med ett fixt reellt tal $R > 1$ och $z \geq 0$. Cylindern T ges av $x^2+y^2 = 1$. Cylindern T skär G i en sluten kurva C. Ytan S är den del av ytan G som är över kurvan C. För $\mathbf{F} = (-2y\cos^2(z), 2x\sin^2(z), \cos^2(xz)y^2 + \sin(y))$, bestäm
$$\iint_S \text{curl}\,\mathbf{F} \bullet \mathbf{N}\,dS,$$
där $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till G. **(4 p)**

8. Vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ är givet i planet.
   (a) Är $\mathbf{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. (Motivera ordentligt.) **(2 p)**
   (b) Bestäm en potentialfunktion till $\mathbf{F}$ i området **(1 p)**
$$D_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$
   (c) Bestäm en potentialfunktion till $\mathbf{F}$ i området **(1 p)**
$$D_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \mid y \leq 0\}.$$

9. Funktionen
$$f(x,y) = \ln(2+x-y) - \cos(x+y) - \frac{1}{2}x^2,$$
har en kritisk punkt nära $(x,y) = (0.7, -0.4)$. Skriv ett Matlab-program som beräknar den kritiska punkten med hjälp av Newtons metod för system. Felet i både x- och y-koordinaten ska vara mindre än 10^{-10}. **(4 p)**