SF1669 Matematisk och numerisk analys II
Lösningsförslag till tentamen 2019-03-12

DEL A

1. Vi har funktionen $f(x, y) = \ln(x^2 + xy^2 - 4)$.
   a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till funktionsytan $z = f(x, y)$ i punkt $(1, 2, 0)$. **(2 p)**
   b) Använd resultatet från uppgifterna ovan för att bestämma ett närmevärde till $f(1.01, 1.97)$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

a) De partiella derivatorna av första ordningen ges av

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x^2 + xy^2 - 4} \cdot (2x + y^2)$$

och

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x^2 + xy^2 - 4} \cdot 2xy,$$

b) Tangentplanet i punkten $(1, 2)$ till funktionen $f(x, y)$ ges av

$$z = f(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)(y - 2).$$

För funktionen $f(x, y) = \ln(x^2 + xy^2 - 4)$ har vi $f(1, 2) = \ln 1 = 0$.
De partiella derivatorna av $f(x, y)$ är i punkten $(1, 2, 0)$ blir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 6, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4.$$

Därmed är tangentplanets ekvation

$$z = 6(x - 1) + 4(y - 2).$$

c) Ekvationen för tangentplanet i punkten $(1, 2)$ är det förstagradspolynom i x och y som bäst approximerar $f(x, y)$ nära punkten.
För att bestämma ett närmevärde till $z = f(1.01, 1.97)$ använder vi det z-värde vi får från tangentplanets ekvation när vi sätter in $x = 1.01$ och $y = 1.97$. Detta värde är

$$z = 6(1.01 - 1) + 4(1.97 - 2) = 0.06 - 0.12 = -0.06.$$

Anm. Det approximativa värdet kan jämföras med det exakta värdet $f(1.01, 1.97) = \ln 0.939809 \approx -0.062$.

Svar.

b) $z = 6(x - 1) + 4(y - 2)$.
c) $z \simeq -0.06$.

2. Med (x, y)-koordinater specifieras vilken position på golvet en person befinner sig i. Funktionen $T(x, y) = 5 + x^2 + y^2 - 2x + 4y$ anger temperaturen i position (x, y). Personen befinner sig i position $(2, 3)$.
   (a) Ange i vilken riktning personen ska röra sig för att på snabbast möjliga sätt öka temperaturen. **(2 p)**
   (b) Rita den kurva personen ska följa om denna vill röra sig utan att ändra temperaturen. **(2 p)**

Lösningsförslag. a) Gradienten $\nabla T = (2x - 2, 2y + 4)$ har värdet

$$\nabla T(2, 3) = (4 - 2, 6 + 4) = (2, 10),$$

vilket är den sökta riktningen där temperaturökningen är som störst.

b) Vi söker nivåkurvan till $T(2, 3) = 5 + 4 + 9 - 4 + 12 = 26$. Vi har att

$$T(x, y) = 5 + x^2 + y^2 - 2x + 4y = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 5 - 1 - 4.$$

Dettta betyder att nivåkurvan $T(x, y) = 26$ är cirkeln med radie $\sqrt{26}$ centrerad omkring punkten $(1, -2)$.

3. Betrakta en cylinder med cirkulär bas. Dess höjd är given som $h = 2.00 \pm 0.06$ och basytans radie som $r = 0.5000 \pm 0.0025$. Uppskatta felgränsen för cylinderns volym.

(4 p)

Lösningsförslag. Volymen V bestäms av uttrycket

$$V(r, h) = hr^2\pi.$$

Enligt felfortplantningsformeln ges felgränsen E_V för V av

$$\begin{aligned} E_V &\approx \left|\frac{\partial V(\tilde{r}, \tilde{h})}{\partial r}\right| E_r + \left|\frac{\partial V(\tilde{r}, \tilde{h})}{\partial h}\right| E_h = \left|2\tilde{h}\tilde{r}\pi\right| E_r + \left|\tilde{r}^2\pi\right| E_h \\ &= |2\pi|\, 0.0025 + |0.25\pi|\, 0.06 = 0.02\pi \approx 0.063. \end{aligned}$$

Svar.

DEL B

4. Funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig i den slutna enhetsskivan $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ och har ett lokalt maximumvärde i origo $(0, 0)$. Vilka av nedanstående påståenden är sanna för alla sådana funktioner f?
   (a) $\nabla f(0, 0)$ existerar och är lika med $(0, 0)$. **(2 p)**
   (b) Ytan $z = f(x, y)$ har ett (unikt) horisontellt tangentplan i origo. **(1 p)**
   (c) $f(0, 0) \geq f(x, y)$ i en omgivning av $(0, 0)$ för $(x, y) \neq (0, 0)$. **(1 p)**
   För de påståenden som är sanna ska en ordentlig motivering ges. För de påståenden som är falska krävs ett motexempel.

Lösningsförslag.

(a) Nej, inte sant. Ett motexempel är $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ som saknar partiella derivator i origo, men har ett maximum punkt där.
Även en enkel 1-dimensionell exempel ger ett NEJ svar: $f(x, y) = -|x|$. Derivatan i origo existerar inte.

(b) Nej, exemplen ovan fungerar som motexempel även här. Vi ser att för fallet $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ varje plan som går igenom origo och har en lutning som är mindre än 45-grader liger ovanför funktionsgrafen $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$. Därför saknar ytan ett (unikt) tangentplan.

(c) Ja. Detta är precis definitionen för ett lokalt maximum punkt.

(d) Nej. Exempelvis för $f(x, y) = -|x|$ har vi att $f(0, y) = 0$.

(e) Nej. Exempelvis för funktionen $f(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 1/2)^2 - 1/4$ gäller det att $f(0, 0) = 0$ samt $f = 0$ på randen till D. Observera att $f \leq 0$ i D.

Svar.

5. Kroppen K begränsas av en kon och en sfär enligt

$$z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}, \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4.$$

a) Beskriv K i cylindriska koordinater. **(2 p)**
b) Beräkna **(2 p)**

$$\iiint_K z\,dx\,dy\,dz.$$

Lösningsförslag.

a) Cylindriska koordinater ges av z som är avståndet till xy-planet, r som är avståndet till z-axeln, och θ som är vinkeln för $(x, y, 0)$ i polära koordinater:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z,$$

Ekvationen för $z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}$, i cylindriska koordinater blir $z \geq r\sqrt{3}$ och för $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ blir det $r^2 + z^2 \leq 4$. Skärningen mellan konen och sfären ges av en cirkel $r^2 + (r\sqrt{3})^2 = 4$ som ger $r = 1$. Dvs radien av skärningscirkeln är 1, som står på en höjd $z = \sqrt{3}$.
Därför Kroppen K ligger över enhetscirkelskivan. För kroppen K varierar alltså z mellan $\sqrt{3}r$ och $\sqrt{4 - r^2}$, radien r mellan 0 och 1, och vinkeln θ mellan 0 och 2π, dvs

$$\sqrt{3}r \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}, \qquad 0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

b) Sfäriska koordinater ges av avståndet r till origo, vinkeln θ runt z-axeln, samt vinkeln φ från z-axeln

$$x = R\cos\theta\sin\varphi, \qquad y = R\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = R\cos\varphi,$$

För kroppen K varierar R mellan 0 och 2, vinkeln θ hela varvet runt, $0 \leq \theta < 2\pi$. Vinkeln φ varierar från 0 för punkter på z-axeln till $\pi/6$ vilket är vinkeln till skärningscirkeln.

c) Eftersom K är rotationssymmetrisk i xy-planet så är $TK = K$. Vidare kan jacobianen beräknas enkelt $J = 1$. Vi har därför

$$\iiint_K x^2\,dx\,dy\,dz = \iiint_{TK} (-y)^2 J\,dx\,dy\,dz = \iiint_K y^2\,dx\,dy\,dz.$$

d) *Cylindriska koordinater:* I cylindriska koordinater är volymelementet $dx\,dy\,dz = r\,dr\,dz\,d\theta$ och integralen blir

$$\int\int\int_K z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} r\,z\,dz \right) dr \right) d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r \cdot \frac{1}{2} \left(4 - r^2 - 3r^2\right) \right) \, dr \right) \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(2r - 2r^3\right) \, dr \right) \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, d\theta = \pi .
\end{aligned}
$$

Rymdpolära koordinater: I sfäriska koordinater är volymelementet $dx\,dy\,dz = R^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$. Integralen överförs till

$$
\begin{aligned}
\iiint_K z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi/6} \left(\int_0^2 R \cos\varphi \, R^2 \sin\varphi \, dR \right) \, d\varphi \right) \, d\theta \\
&= 2\pi \cdot \int_0^2 R^3 \, dR \cdot \int_0^{\pi/6} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \\
&= 2\pi \cdot 4 \cdot \int_0^{\pi/6} \frac{1}{2} \sin 2\varphi \, d\varphi = 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} = \pi .
\end{aligned}
$$

6. En integral approximeras med en numerisk kvadraturmetod där olika steglängder h använts. Resultaten I_h approximerar den exakta integralen I. Nedan listas felet i några av dessa värden.

$I_{0.2} - I$	$1.027719065405108 \cdot 10^{-4}$
$I_{0.1} - I$	$0.063819691753508 \cdot 10^{-4}$
$I_{0.05} - I$	$0.003999391928743 \cdot 10^{-4}$
$I_{0.025} - I$	$0.000250039988713 \cdot 10^{-4}$

Felet antas bero snällt på steglängden.
(a) Vilken noggrannhetsordning har kvadraturmetoden? (2 p)
(b) Uppskatta hur stort felet $I_{0.01} - I$ skulle vara. (2 p)

Lösningsförslag. När felet beror snällt på steglängden gäller

$$y_h - y(1) \approx ch^p,$$

där p är noggrannhetsordningen och c är någon konstant. Det betyder att

$$\frac{y_h - y(1)}{y_{h/2} - y(1)} \approx \frac{ch^p}{ch^p 2^{-p}} = 2^p.$$

(a) Enligt tabellen,

$$\frac{y_{0.05} - y(1)}{y_{0.05/2} - y(1)} = \frac{0.003999391928743 \cdot 10^{-4}}{0.000250039988713 \cdot 10^{-4}} \approx \frac{400}{25} = 16 = 2^4.$$

Noggrannhetsordningen är därför 4.

(b) Eftersom $p = 4$ gäller för $h = 0.025$ sambandet

$$2.5 \cdot 10^{-8} \approx y_{0.025} - y(1) \approx c\, 0.025^4 = c\, \frac{10^{-4}}{4^4},$$

dvs

$$c \approx 4^4 \times 2.5 \cdot 10^{-4} = 6.4 \cdot 10^{-2}.$$

Det ger uppskattningen

$$y_{0.01} - y(1) \approx c\, 0.01^4 \approx 6.4 \cdot 10^{-2} \times 10^{-8} = 6.4 \cdot 10^{-10}.$$

Svar: Noggrannhetsordningen är 4 och felet $y_{0.01} - y(1) \approx 6.4 \cdot 10^{-10}$.

7. (C-delen) Funktionen

$$f(x, y) = \ln(2 + x - y) - \cos(x + y) - \frac{1}{2}x^2,$$

har en kritisk punkt nära $(x, y) = (0.7, -0.4)$. Skriv ett Matlab-program som beräknar den kritiska punkten med hjälp av Newtons metod för system. Felet i både x- och y-koordinaten ska vara mindre än 10^{-10}. (4 p)

Lösning: Den kritiska punkten är en lösning till ekvationssystemet $f_x = 0$ och $f_y = 0$, dvs

$$\frac{1}{2+x-y} + \sin(x+y) - x = 0,$$
$$\frac{-1}{2+x-y} + \sin(x+y) = 0.$$

Jakobian-matrisen för systemet blir

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(2+x-y)^2} + \cos(x+y) - 1 & \frac{1}{(2+x-y)^2} + \cos(x+y) \\ \frac{1}{(2+x-y)^2} + \cos(x+y) & \frac{-1}{(2+x-y)^2} + \cos(x+y) \end{pmatrix}.$$

Nedanstående Matlab-script löser systemet med Newtons metod.

```
F = @(X) [1./(2+X(1)-X(2))+sin(X(1)+X(2))-X(1);
-1./(2+X(1)-X(2))+sin(X(1)+X(2))];
J = @(X) [-1./(2+X(1)-X(2)).^2+cos(X(1)+X(2))-1...1./(2+X(1)-X(2)).^2+
cos(X(1)+X(2));1./(2+X(1)-X(2)).^2+cos(X(1)+X(2))...-1./(2+X(1)-X(2)).^2+
cos(X(1)+X(2))];
X=[0.7; -0.4]; d=1;
while max(abs(d))>1e-10 d = -J(X)(X); X = X + d; end disp(X)
```

Svaret blir $x \approx 0.6677574562$ och $y \approx -0.3273420090$.

DEL C

7. Låt G vara den övre halvsfären som ges av $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ med ett fixt reellt tal $R > 1$ och $z \geq 0$. Cylindern T ges av $x^2+y^2 = 1$. Cylindern T skär G i en sluten kurva C. Ytan S är den del av ytan G som är över kurvan C. För $\mathbf{F} = (-2y\cos^2(z), 2x\sin^2(z), \cos^2(xz)y^2 + \sin(y))$, bestäm
$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \bullet \mathbf{N}\, dS,$$
där $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till G. **(4 p)**

Lösningsförslag. Om vi orienterar kurvan C moturs, sätt ovanifrån, då ger Stokes sats att den sökta integralen
$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \bullet \mathbf{N}\, dS = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$
Låt nu D vara enhetsdisken $x^2 + y^2 = 1$ placerad i $\mathbb{R}^3$ sådan att randen till disken D är precis kurvan C. Disken har enhetsnormalfält $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Stokes Sats ger att
$$\int_C \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{r} = \iint_D \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot\, \mathbf{k}\, dS.$$
Tredje komponenten av vektorfältet curl $\mathbf{F}$ är
$$\partial_x(F_2) - \partial_y(F_1) = 2\sin^2(z) + 2\cos^2(z) = 2.$$
Därmed har vi att
$$\iint_D \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot\, \mathbf{k}\, dS = \iint_D 2 dS = 2\pi.$$

8. Vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = (\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2})$ är givet i planet.

   (a) Är $\mathbf{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. (Motivera ordentligt.) **(2 p)**

   (b) Bestäm en potentialfunktion till $\mathbf{F}$ i området **(1 p)**

$$D_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

   (c) Bestäm en potentialfunktion till $\mathbf{F}$ i området **(1 p)**

$$D_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) \mid y \leq 0\}.$$

Lösningsförslag. a) Låt Γ vara enhetscirkeln $r(t) = (\cos(t), \sin(t))$ $(0 \leq t < 2\pi)$. Vi har att $r'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$. Insätter vi denna parametrisering i definitionen av linje integralen får vi

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin(t), \cos(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Om fältet F vore konservativt i $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ skulle linje-integralen av varje sluten kurva bli 0, vilket integralen ovan inte blev. Därmed har vi att fältet inte kan vara konservativt.
Alternativ kan man undersöka genom motsägelse. Om $\mathbf{F}$ vore konservativt skulle det finnas $z = f(x,y)$ med $\nabla f = \mathbf{F}$, vilket pekar mot den riktning som f ökar mest. Eftersom fältlinjerna till $\mathbf{F}$ är cirklar med olika radier och centrum i origo så kan vi se att om vi följer fältlinjen som startar i en punkt (x_0, y_0), kommer vi tillbaka till samma punkt. Dvs f kommer inte att öka utan att vara konstant längs fältlinjen. Detta är en motsägelse att fältet är en gradientfält.

b) Integrera $\frac{-y}{x^2+y^2}$ m.a.p. x för att få $f(x,y) = \arctan(y/x) + g(y)$, som efter derivering m.a.p. y ger oss att $g = \ Konstant$ som vi ex.vis kan välja till noll. Därför är $f(x,y) = \arctan(y/x)$ en potentialfunktion till $\mathbf{F}$ definierad på D_1.

c) Funktionen f i b) uppgiften är ej definierad på y-axeln, eftersom den får 2-olika värden beroende på om vi närmar oss y-axeln från höger eller vänster. Men den kan ersättas med en annan funktion som kan utvidgas att vara definierade på D_2 och deriverbar där. Vi låter

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \arctan(y/x) & x > 0, \\ \pi/2 & x = 0, \\ \pi + \arctan(y/x) & x < 0. \end{cases}$$

d) Vi använder en potentialfunktion, från antingen b) eller c) och får att

$$\int_E \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

Om vi använder $\tilde{f}$ från c) kan vi använda oss av $(0,-1)$ som både start och slutpunkt samtidigt som vi tar hänsyn till att $\tilde{f}$ inte är definierade i just denna punkt, men har olika gränsvärden beroende på om vi närmar oss punkten från negativa eller positiva x-axeln.

Låt E_ϵ vara den del av E som ligger i en ϵ-omgivining av $(0,-1)$. Mer exakt

$$E_\epsilon = \{x^{20} + y^{20} = 1 : \ |x| \leq \epsilon \, , y > 0\}.$$

Eftersom E_ϵ har längd $\approx \epsilon$ och $\mathbf{F}$ är kontinuerlig nära $(0,-1)$ så får vi att

$$\int_E \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{E-E_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Låt nu $P_\epsilon^\pm = (\pm x_\epsilon, y_\epsilon)$ vara ändpunkterna av kurvan $E - E_\epsilon$ och använd potentialfunktionen $\tilde{f}$:

$$\int_E \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{E-E_\epsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\tilde{f}(P_\epsilon^-) - \tilde{f}(P_\epsilon^+) \right) =$$
$$(\pi + \arctan(+\infty)) - (\arctan(-\infty)) = 2\pi.$$

Observera att vi har använt oss av att i punkten P_ϵ^- både x och y är negativa och därför är y/x nära positiv oändligheten. För P_ϵ^+ gäller det att y är negativ och x positiv.

9. Funktionen
$$f(x,y) = \ln(2+x-y) - \cos(x+y) - \frac{1}{2}x^2,$$
har en kritisk punkt nära $(x,y) = (0.7, -0.4)$. Skriv ett Matlab-program som beräknar den kritiska punkten med hjälp av Newtons metod för system. Felet i både x- och y-koordinaten ska vara mindre än 10^{-10}. **(4 p)**

Lösningsförslag. Den kritiska punkten är en lösning till ekvationssystemet $f_x = 0$ och $f_y = 0$, dvs
$$\frac{1}{2+x-y} + \sin(x+y) - x = 0,$$
$$\frac{-1}{2+x-y} + \sin(x+y) = 0.$$
Jakobian-matrisen för systemet blir
$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(2+x-y)^2} + \cos(x+y) - 1 & \frac{1}{(2+x-y)^2} + \cos(x+y) \\ \frac{1}{(2+x-y)^2} + \cos(x+y) & \frac{-1}{(2+x-y)^2} + \cos(x+y) \end{pmatrix}.$$
Nedanstående Matlab-script löser systemet med Newtons metod.

```
F = @(X) [1./(2+X(1)-X(2))+sin(X(1)+X(2))-X(1); -1./(2+X(1)-X(2))+sin(X
```

`J = @(X) [-1./(2+X(1)-X(2)).`$^2 + cos(X(1)+X(2)) - 1...1./(2+X(1)-X(2)).^2 + cos(X(1)+X(2)); 1./(2+X(1)-X(2)).^2 + cos(X(1)+X(2))... - 1./(2+X(1)-X(2)).^2 + cos(X(1)+X(2))];$

```
X=[0.7; -0.4]; d=1;
while max(abs(d))>1e-10 d = -J(X)(X); X = X + d; end disp(X)
```

Svaret blir $x \approx 0.6677574562$ och $y \approx -0.3273420090$.