

Kontrollskrivning i matematik för Teknisk bastermin, 2019-08-26

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling och skrivmateriel.

Maxpoäng på denna kontrollskrivning är 12. Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. 7p motsvarar ”godkäntnivå”- det ger ingen bonus på tentan men indikerar vad som skulle vara godkäntnivå på era förkunskaper.

1. Bestäm $f'(0)$ då $f(x) = \frac{2}{3e^{3x}} - 3e^x$ 2p

2. Förenkla uttrycket $(2x - 7)(2x + 7) - (x - 5)^2$ så långt som möjligt. 2p

3. Skriv polynomet på faktorform: $p(x) = -3x^2 - 2x + 1$ 2p

4. I en triangel är sidan AC=25 m, sträckan BC=15 m och vinkeln A=30°. Bestäm vinkeln B. Svara i hela grader. 2p

5. Lös ekvationen $\frac{2x}{x-3} = 3x + \frac{6}{x-3}$ 2p

6. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter samt terrasspunkter till funktionen $f(x) = \frac{x^3}{3} - 16x$, samt ange dess karaktär/karaktärer. 2p

Lösningar

1. $f(x) = \frac{2}{3e^{3x}} - 3e^x = \frac{2e^{-3x}}{3} - 3e^x$ ger $f'(x) = \frac{(-3)2e^{-3x}}{3} - 3e^x = -2e^{-3x} - 3e^x$

$$f'(0) = -2e^{3 \cdot 0} - 3e^0 = -2 - 3 = -5$$

Svar: $f'(0) = -5$

2. $(2x-7)(2x+7) - (x-5)^2 = 4x^2 - 49 - (x^2 - 10x + 25) =$
 $= 4x^2 - 49 - x^2 + 10x - 25 = 3x^2 + 10x - 74$

Svar: $3x^2 + 10x - 74$

3. $p(x) = -3x^2 - 2x + 1 = -3\left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right)$

Vi söker polynomets nollställen:

$$p(x) = 0$$

$$-3\left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}}$$

$$x = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{3}{9}}$$

$$x = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$x = -\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

Med hjälp av sambandet mellan ett polynoms nollställen och dess faktorer: om $x - a$ är en faktor till polynomet $p(x)$ så är $x = a$ ett nollställe till polynomet $p(x)$; kan vi nu skriva polynomet som

Svar: $p(x) = -3(x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

4. Sinus-satsen:

$$\frac{\sin B}{25} = \frac{\sin 30^\circ}{15} \Rightarrow \sin B = \frac{25}{15} \cdot 0,5$$

$$B_1 \approx 56,44^\circ \text{ eller } B_2 \approx 180^\circ - 56,44^\circ \approx 123,56^\circ$$

Svar: 56° eller 124°

$$5. \quad \frac{2x}{x-3} = 3x + \frac{6}{x-3} \quad \text{där } x \neq 3$$

$$\frac{2x}{x-3} = \frac{3x(x-3)}{x-3} + \frac{6}{x-3}$$

$$\frac{2x}{x-3} = \frac{3x^2 - 9x + 6}{x-3}$$

För att likheten ska gälla måste täljarna i båda leden vara lika stor:

$$2x = 3x^2 - 9x + 6$$

$$0 = 3x^2 - 11x + 6$$

$$0 = x^2 - \frac{11x}{3} + 2$$

$$x = \frac{11}{6} \pm \sqrt{\frac{121}{36} - \frac{2 \cdot 36}{36}}$$

$$x = \frac{11}{6} \pm \sqrt{\frac{121 - 72}{36}} = \frac{11}{6} \pm \sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{11}{6} \pm \frac{7}{6}$$

$$(x_1 = 3) \text{ eller } x_2 = \frac{2}{3}$$

Svar: Ekvationen har en lösning, $x = \frac{2}{3}$

6. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 16x$

$$f'(x) = x^2 - 16$$

Vi söker nollställena till derivatan, d v s vi löser ekvationen $x^2 - 16 = 0$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

Undersök andraderivatans tecken för att avgöra punkternas karaktär:

$$f'(x) = x^2 - 16 \text{ ger } f''(x) = 2x$$

$$f''(-4) = 2 \cdot (-4) = -8 < 0, \text{ alltså maximipunkt då } x = -4$$

$$f''(4) = 2 \cdot 4 = 8 > 0, \text{ alltså minimipunkt då } x = 4$$

Beräkna y-koordinaterna vid extrempunkterna:

$$f(-4) = \frac{(-4)^3}{3} - 16 \cdot (-4) = \frac{-64}{3} + 64 = \frac{-64 + 192}{3} = \frac{128}{3}$$

$$f(4) = \frac{4^3}{3} - 16 \cdot (4) = \frac{64}{3} - 64 = \frac{64 - 192}{3} = -\frac{128}{3}$$

Svar: $f(x) = \frac{x^3}{3} - 16x$ har en lokal maximipunkt $\left(-4, \frac{128}{3}\right)$ och en lokal minimipunkt $\left(4, -\frac{128}{3}\right)$.

Generella riktlinjer för tentamensrättning

Varje beräkningsfel (Därefter fortsatt rättning enligt nya förutsättningar)	-1 poäng
Beräkningsfel; allvarliga och/eller leder till förenkling	-2 poäng eller mer
Prövning istället för generell metod	- samtliga poäng
Felaktiga antaganden/ansatser	- samtliga poäng
Lösning svår att följa och/eller <u>Svaret</u> framgår inte tydligt	-1 poäng eller mer
Om '=' saknas (t.ex. ' $\Rightarrow$ ' används istället)	-1 poäng/tenta
Om '=' används felaktigt (t.ex. istället för ' $\Rightarrow$ ')	-1 poäng/tenta
<u>Teoretiska uppgifter:</u>	
Avrundat svar	-1 poäng/tenta
<u>Tillämpade uppgifter:</u>	
Enhet saknas/fel	-1 poäng/tenta
Avrundningar i delberäkningar som ger fel svar	-1 poäng/tenta
Svar med felaktigt antal värdesiffror (± 1 värdesiffra ok)	-1 poäng/tenta
Andra avrundningsfel	-1 poäng/tenta

Specifika uppgifter

1. Varje felaktig term i derivatan	-1p
Fel vid insättning av $x=0$ i uttrycket för $f'(x)$	-1p
2. Korrekt använd konjugat- och kvadreringsregel men sedan fel	+1p
3. Konstanten -3 saknas i svaret	-1p
Teckenfel vid övergång från nollställe till faktor	-1p
Svarar med konstanten in multiplicerad i någon av de övriga faktorerna, t ex $p(x) = -(x+1)(3x-1)$	OK
4. En lösning saknas	-1p
5. Definitionsmängden saknas	-0p
Har med $x=3$ i svaret	-1p
6. Deriveringsfel	-2p
Punkt/punkters karaktär ej bestämd/felaktigt bestämd	-1p
Svarar bara med x-värden	-1p