KTH Teknikvetenskap

# Lösningsförslag till Tentamen

**SF1659 Baskurs i matematik**
**Fredagen den 18 september 2019, kl 14.00–17.00.**

1. Hitta alla reella lösningar (om det finns några) till ekvationen $e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$.

Sätt $t = e^x$. Ekvationen kan då uttryckes helt i $t$ som obekant,

$$t^2 - 3t - 2 = 0.$$

Detta är en andragradsekvation där vänsterledet kvadratkompletteras,

$$\begin{aligned}\left(t - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 - 2 &= 0,\\ \left(t - \tfrac{3}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4} - \tfrac{8}{4} &= 0,\\ \left(t - \tfrac{3}{2}\right)^2 &= \tfrac{17}{4},\\ t &= \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{17}.\end{aligned}$$

Eftersom $e^x$ endast antar positiva värden är $t = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$ den enda möjligheten och ger att

$$e^x = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{17} \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{17}\right).$$

**Svar:** $x = \ln\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}\right)$

2. Ange definitionsmängderna till funktionerna $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ och $g(x) = \sqrt{x-1}$.

Funktionen $f(x) = 1/(1-x)$ är definierad för alla $x$ utom då nämnaren $1 - x$ blir noll, dvs. $x \neq 1$.

Funktionen $g(x) = \sqrt{x-1}$ är definierad för alla $x$ utom då argumentet $x - 1$ till kvadratroten är negativ, dvs. $x \geq 1$.

**Svar:** $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 1\}$ och $D_g = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 1\}$

3. Lös olikheten $|x+1| \geq 2|x-1|$.

Vi har att

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{om } x+1 \geq 0, \\ -(x+1), & \text{om } x+1 < 0, \end{cases} = \begin{cases} x+1, & \text{om } x \geq -1, \\ -(x+1), & \text{om } x < -1, \end{cases}$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{om } x-1 \geq 0, \\ -(x-1), & \text{om } x-1 < 0, \end{cases} = \begin{cases} x-1, & \text{om } x \geq 1, \\ -(x-1), & \text{om } x < 1. \end{cases}$$

Därför behöver vi undersöka olikheten i tre olika fall.

(a) $x < -1$: I detta fall blir olikheten

$$\begin{aligned} |x+1| \geq 2|x-1| \quad &\Leftrightarrow \quad -(x+1) \geq -2(x-1) \\ &\Leftrightarrow \quad -x-1 \geq -2x+2) \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq 3 \end{aligned}$$

men eftersom $x < -1$ inträffar detta inte.

(b) $-1 \leq x < 1$: I detta fall blir olikheten

$$\begin{aligned} |x+1| \geq 2|x-1| \quad &\Leftrightarrow \quad x+1 \geq -2(x-1) \\ &\Leftrightarrow \quad x+1 \geq -2x+2) \\ &\Leftrightarrow \quad 3x \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

De $x$ som uppfyller olikheten på intervallet $[-1, 1)$ är alltså $\frac{1}{3} \leq x < 1$.

(c) $x \geq 1$: I detta fall blir olikheten

$$\begin{aligned} |x+1| \geq 2|x-1| \quad &\Leftrightarrow \quad x+1 \geq 2(x-1) \\ &\Leftrightarrow \quad x+1 \geq 2x-2) \\ &\Leftrightarrow \quad x \leq 3 \end{aligned}$$

vilket är uppfyllt för $1 \leq x \leq 3$.

Sammanställer vi fallen så ser vi att olikheten är uppfylld när

$$\tfrac{1}{3} \leq x < 1 \quad \text{eller} \quad 1 \leq x \leq 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad \tfrac{1}{3} \leq x \leq 3$$

**Svar:** $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$

4. Betrakta de hyperboliska funktionerna

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{och} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Förenkla uttrycket $\dfrac{1}{(\cosh x)^2} + \left(\dfrac{\sinh x}{\cosh x}\right)^2$ så långt som möjligt.

Vi har

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\cosh x)^2} + \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)^2 &= \frac{1+\sinh^2 x}{\cosh^2 x}\\ &= \{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sinh^2 x = \cosh^2 x - 1\}\\ &= \frac{1+\cosh^2 x - 1}{\cosh^2 x}\\ &= \frac{\cosh^2 x}{\cosh^2 x}\\ &= 1\end{aligned}$$

**Svar:** 1

5. Lös ekvationen $\ln 2x + \ln 3x = \ln 4x$.

Eftersom logaritmfunktionen endast är definierad för positiva argument måste $x > 0$. Med hjälp av logaritmlagarna kan ekvationens båda led förenklas till

$$\begin{aligned}&\ln 2x + \ln 3x = \ln(2x \cdot 3x) = \ln 6x^2 = \ln 6 + \ln x^2 = \ln 6 + 2\ln x,\\ &\ln 4x = \ln 4 + \ln x.\end{aligned}$$

Ekvationen blir då

$$\ln 6 + 2\ln x = \ln 4 + \ln x \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = \ln 4 - \ln 6 = \ln \tfrac{4}{6} = \ln \tfrac{2}{3}.$$

Eftersom logaritmfunktionen är strängt växande är den injektiv och den enda lösningen är $x = \frac{2}{3}$.

**Svar:** $x = \frac{2}{3}$

6. Bestäm alla lösningar till $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{2}$.

Ekvationen kan skrivas som

$$\left(\cos^2 x\right)^2 + \left(\sin^2 x\right)^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Eftersom $\sin^2 x$ kan skrivas som $1 - \cos^2 x$ kan ekvationen skrivas som

$$\begin{aligned}\left(\cos^2 x\right)^2 + \left(1-\cos^2 x\right)^2 &= \tfrac{1}{2},\\ \left(\cos^2 x\right)^2 + 1 - 2\cos^2 x + \left(\cos^2 x\right)^2 &= \tfrac{1}{2},\\ 2\left(\cos^2 x\right)^2 - 2\cos^2 x + \tfrac{1}{2} &= 0,\\ \left(\cos^2 x\right)^2 - \cos^2 x + \tfrac{1}{4} &= 0.\end{aligned}$$

Kvadratkomplettera vänsterledet,

$$\begin{aligned}\left(\cos^2 x - \tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} &= 0,\\ \left(\cos^2 x - \tfrac{1}{2}\right)^2 &= 0.\end{aligned}$$

För att vänsterledet ska bli noll måste ett av följande fall inträffa:

- $\cos x = 1/\sqrt{2}$: $x = \pm\pi/4 + 2n\pi$ ($n$ heltal),

- $\cos x = -1/\sqrt{2}$: $x = \pm 3\pi/4 + 2n\pi$ ($n$ heltal),

vilket kan sammanfattas som $x = \pi/4 + \pi n/2$ ($n$ heltal).

| **Svar:** $x = \pi/4 + \pi n/2$ ($n$ heltal) |
|---|

7. Beräkna koefficienten framför $x^2$ i utvecklingen av $\left(x + \frac{1}{2}\right)^8$.

Binomialsatsen ger att

$$\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^8 = \binom{8}{0}x^8 + \binom{8}{1}x^7\left(\tfrac{1}{2}\right)^1 + \cdots + \binom{8}{6}x^2\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 + \binom{8}{7}x^1\left(\tfrac{1}{2}\right)^7 + \binom{8}{8}\left(\tfrac{1}{2}\right)^8$$

och då ser vi att koefficienten framför $x^2$ är

$$\binom{8}{6}\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 = \frac{8!}{6!\,2!}\cdot\frac{1}{2^6} = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{2^6} = \frac{2^3\cdot 7}{2^7} = \frac{7}{2^4} = \frac{7}{16}$$

| **Svar:** $7/16$ |
|---|

8. Bestäm konstanten $a$ så att ekvationen $x^2 + x + a = 0$ har lösningen $x = 2$. Bestäm även den andra lösningen.

Genom att sätta in $x = 2$ i ekvationen får vi

$$2^2 + 2 + a = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a = -6.$$

Faktorsatsen ger då att

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x-b)$$

där $b$ är ekvationens andra rot. Utveckla högerledet och identifiera koefficienterna framför $x^2$, $x$ och konstanttermen,

$$x^2 + x - 6 = x^2 - (b+2)x + 2b \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} b+2 = -1 \\ 2b = -6 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad b = -3.$$

| **Svar:** $a = -6$ och $x = -3$ |
|---|

9. Heavisidefunktionen definieras som

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{om } x \geq 0, \\ 0, & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Bestäm alla $x$ som löser olikheten $(2x-3)(3x-8) \leq 3H(x-2)$.

Vi har att

$$H(x-2) = \begin{cases} 1, & \text{om } x \geq 2, \\ 0, & \text{om } x < 2, \end{cases}$$

och betraktar därför olikheten i de två fallen $x \geq 2$ och $x < 2$.

- $x \geq 2$: Olikheten är i detta fall

  $$(2x-3)(3x-8) \leq 3.$$

  Utveckla vänsterledet och samla alla termer i ena ledet,

  $$6x^2 - 25x + 21 \leq 0.$$

  Kvadratkomplettera vänsterledet

  $$\begin{aligned} 6\left[\left(x-\frac{25}{12}\right)^2 - \left(\frac{25}{12}\right)^2 + \frac{21}{6}\right] \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{25}{12}\right)^2 - \frac{25^2 - 21\cdot 12\cdot 2}{12^2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{25}{12}\right)^2 - \frac{121}{12^2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{25}{12}\right)^2 - \frac{11^2}{12^2} \leq 0. \end{aligned}$$

  Använd konjugatregeln för att faktorisera vänsterledet

  $$\begin{aligned} \left(x-\frac{25}{12}-\frac{11}{12}\right)\left(x-\frac{25}{12}+\frac{11}{12}\right) \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x-\frac{36}{12}\right)\left(x-\frac{14}{12}\right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-3)\left(x-\frac{7}{6}\right) \leq 0. \end{aligned}$$

  Eftersom $x \geq 2$ så kommer den andra faktorn i vänsterledet alltid vara positiv och olikheten kan endast vara uppfylld om den första faktorn är mindre än eller lika med noll, dvs. $x \leq 3$. De $x$ som uppfyller olikheten är alltså $2 \leq x \leq 3$.

- $x < 2$: Olikheten blir i detta fall

  $$(2x-3)(3x-8) \leq 0$$

  som är uppfylld när båda faktorerna i vänsterledet har olika tecken, vilket ger två delfall: $2x-3 \leq 0$, $3x-8 \geq 0$ och $2x-3 \geq 0$, $3x-8 \leq 0$.

  (a) $2x-3 \leq 0$, $3x-8 \geq 0$: Detta är uppfyllt när $x \leq \frac{3}{2}$ och $x \geq \frac{8}{3}$, vilket aldrig inträffar eftersom $\frac{8}{3} > \frac{3}{2}$.

  (b) $2x-3 \geq 0$, $3x-8 \leq 0$: Detta är uppfyllt när $x \geq \frac{3}{2}$ och $x \leq \frac{8}{3}$, dvs. $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{8}{3}$.

  Eftersom $x < 2$ ger detta att för $\frac{3}{2} \leq x < 2$ är olikheten uppfylld i detta fall.

Sammanställer vi resultatet ser vi att olikheten är uppfylld för $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$.

**Svar:** $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$