KTH Teknikvetenskap

# Lösningsförslag till Tentamen

**SF1659 Baskurs i matematik**
**Tisdagen den 17 december 2019, kl 08.00–11.00.**

1. Hitta alla reella lösningar (om det finns några) till ekvationen $\ln x^3 = \ln x + 1$.

Från ekvationen ser vi att $x > 0$. Med logaritmlagarna kan ekvationen skrivas

$$\begin{aligned} 3\ln x &= \ln x + 1 \\ 2\ln x &= 1 \\ \ln x &= \tfrac{1}{2} \\ x &= e^{1/2}. \end{aligned}$$

**Svar:** $x = e^{1/2}$

2. Ange definitions- och värdemängden till funktionen $f(x) = e^{\sin(1/(1-x))}$.

Eftersom exponential- och sinusfunktionerna är definierade för alla argument består definitionsmängden till $f$ av alla $x$ för vilket uttrycket $1/(1-x)$ är definierat, dvs. för alla reella $x \neq 1$.

Uttrycket $1/(1-x)$ antar alla värden utom 0. Det betyder att $\sin(1/(1-x))$ antar alla värden i intervallet $[-1, 1]$. Exponentialfunktionen är strängt växande vilket ger att $\exp\sin(1/(1-x))$ antar alla värden i intervallet $[e^{-1}, e^1] = [e^{-1}, e]$.

**Svar:** $D_f = \{x \in \mathbf{R} : x \neq 1\}, \quad V_f = [e^{-1}, e]$

3. Lös olikheten $|x| \leq -3|x+2| + 3$.

Vi har

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0, \\ -x, & \text{om } x < 0, \end{cases} \qquad |x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{om } x \geq -2, \\ -(x+2), & \text{om } x < -2, \end{cases}$$

vilket ger tre fall att undersöka:

- $x < -2$. I detta fall blir olikheten

$$-x \leq 3(x+2) + 3 \quad \Leftrightarrow \quad -x \leq 3x + 9 \quad \Leftrightarrow \quad 4x \geq -9 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\tfrac{9}{4}.$$

  Olikheten är därmed uppfylld för $-\frac{9}{4} \leq x < -2$.

- $-2 \le x < 0$. Olikheten blir

$$-x \le -3(x+2)+3 \quad \Leftrightarrow \quad -x \le -3x-3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \le -3 \quad \Leftrightarrow \quad x \le -\tfrac{3}{2}.$$

  Alltså är olikheten uppfylld när $-2 \le x \le -\frac{3}{2}$.

- $x \ge 0$. Olikheten blir

$$x \le -3(x+2)+3 \quad \Leftrightarrow \quad x \le -3x-3 \quad \Leftrightarrow \quad 4x \le -3 \quad \Leftrightarrow \quad x \le -\tfrac{3}{4}.$$

  Olikheten är alltså inte uppfylld i detta fall.

Sammfattningsvis är olikheten uppfylld när $-\frac{9}{4} \le x \le -\frac{3}{2}$.

**Svar:** $-\frac{9}{4} \le x \le -\frac{3}{2}$

4. Bestäm koefficienten för $1/x^5$ i utvecklingen av $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)^8$.

Binomialsatsen ger att

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)^8 = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \left(\frac{-1}{x^2}\right) \frac{1}{x^{n-k}} = \sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} (-1)^k \frac{1}{x^{8+k}}.$$

Från detta ser vi att $1/x^5$ inte förekommer i utvecklingen.

**Svar:** $1/x^5$ förekommer inte i utvecklingen

5. Beräkna $\arcsin\left(\sin \dfrac{9\pi}{2}\right)$.

Vi har

$$\arcsin\left(\sin \frac{9\pi}{2}\right) = \arcsin\left(\sin \frac{8\pi + \pi}{2}\right) = \arcsin\left(\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) = \arcsin 1 = \pi/2.$$

**Svar:** $\pi/2$

6. Uttryck $\sin 3x$ helt i termer av $\sin x$.

Använd först additionsformeln för sinus,

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(2x + x) \\ &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \end{aligned}$$

och sedan formler för dubbla vinkeln,

$$\begin{aligned} &= 2 \sin x \cos x \cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \cos^2 x \sin x - \sin^3 x \\ &= 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x \end{aligned}$$

och skriv om $\cos^2 x$ som $1 - \sin^2 x$,

$$\begin{aligned} &= 3 \sin x (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x \\ &= 3 \sin x - 3 \sin^3 x - \sin^3 x \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x. \end{aligned}$$

**Svar:** $3 \sin x - 4 \sin^3 x$

7. Beräkna den geometriska summan $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots + x^{100}$.

Den geometriska summan kan skrivas som

$$\sum_{k=0}^{50} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{50} (-x^2)^k.$$

Använd sedan formeln för summan av en geometrisk summa

$$\sum_{k=0}^{50} (-x^2)^k = \frac{1-(-x^2)^{51}}{1-(-x^2)} = \frac{1-(-1)^{51}x^{102}}{1+x^2} = \frac{1+x^{102}}{1+x^2}.$$

**Svar:** $\dfrac{1+x^{102}}{1+x^2}$

8. För vilka $x$ gäller att $\sqrt{x^2-4x} = \sqrt{x^2} - \sqrt{4x}$ ?

Kvadrera båda led i ekvationen

$$\begin{aligned} x^2 - 4x &= \left(\sqrt{x^2} - \sqrt{4x}\,\right)^2 \\ x^2 - 4x &= x^2 - 2|x|\sqrt{4x} + 4x \\ 4x^{3/2} &= 8x \\ 4x(\sqrt{x} - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Detta ger två lösningar $x = 0$ och $x = 4$. Eftersom ekvationen kvadrerades behöver dessa två lösningar prövas. Vi har

- $x = 0$: VL $= \sqrt{0^2 - 4\cdot 0} = 0$ och HL $= \sqrt{0^2} - \sqrt{4\cdot 0} = 0 - 0 = 0$.
- $x = 4$: VL $= \sqrt{4^2 - 4\cdot 4} = 0$ och HL $= \sqrt{4^2} - \sqrt{4\cdot 4} = 4 - 4 = 0$.

**Svar:** $x = 0,\ x = 4$

9. Utför polynomdivisionen $\dfrac{x^4 + 2x^3 + 25}{x^2 + 4x + 5}$.

Vi får

$$\begin{aligned} \frac{x^4 + 2x^3 + 25}{x^2 + 4x + 5} &= \frac{x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x^3 + 5x^2 + 25}{x^2 + 4x + 5} \\ &= x^2 - \frac{2x^3 + 5x^2 - 25}{x^2 + 4x + 5} \\ &= x^2 - \frac{2x^3 + 8x^2 + 10x - 3x^2 - 10x - 25}{x^2 + 4x + 5} \\ &= x^2 - 2x + \frac{3x^2 + 10x + 25}{x^2 + 4x + 5} \\ &= x^2 - 2x + \frac{3x^2 + 12x + 15 - 2x + 10}{x^2 + 4x + 5} \\ &= x^2 - 2x + 3 - \frac{2x - 10}{x^2 + 4x + 5}. \end{aligned}$$

**Svar:** $x^2 - 2x + 3 - \dfrac{2x - 10}{x^2 + 4x + 5}$