Kontrollskrivning i matematik för Teknisk bastermin, 2020-02-04

Tillåtna hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling och skrivmateriel.

Maxpoäng på denna kontrollskrivning är 12. Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. 7p motsvarar ”godkäntnivå”- det ger ingen bonus på tentan men indikerar vad som skulle vara godkäntnivå på era förkunskaper.

1) Lös ekvationen $x^5 = 49x^3$. **(2p)**

2) Bestäm värdet av följande uttryck: $\frac{5}{6} + \frac{3}{14} + \frac{5}{21}$

Svara <u>exakt</u>, med ett bråk som är förkortat så långt det går. **(2p)**

3) Utveckla och förenkla uttrycket $(4x-2)^2 - (x+2)\cdot(x-1) + 5x + 15$ så långt som möjligt. **(2p)**

4) Låt $f(x) = \frac{5}{\sqrt[9]{x^4}} + 3x^{10} + e^{-12x} + 2\sqrt{3}$. Bestäm $f'(x)$. **(2p)**

5) Bestäm för funktionen $f(x) = 2x^4 - 2x^2$ eventuella

(i) lokala maxpunkter
(ii) lokala minpunkter
(iii) terrasspunkter **(2p)**

6) Bestäm den största vinkeln i en triangel med sidlängderna 10 m, 15 m och 20 m. **(2p)**

Lösningsförslag

1) $x^5 = 49x^3$

$x^5 - 49x^3 = 0$

$(x^2 - 49)\cdot x^3 = 0$, Nollprodukt ger:

$x^2 - 49 = 0$ eller $x^3 = 0$

$x = \pm 7$ eller $x = 0$

Svar: x = -7 , x = 0 eller x = 7.

2) Primtalsfaktorisera nämnarna för att kunna beräkna minsta gemensamma nämnare (MGN):

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{14}+\frac{5}{21}=\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 7}+\frac{5}{3\cdot 7} \qquad \text{MGN} = 2\cdot 3\cdot 7 = 42$$

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{14}+\frac{5}{21}=\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 7}+\frac{5}{3\cdot 7}=\frac{5\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 7}+\frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 7}+\frac{2\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 7}=\frac{35}{2\cdot 3\cdot 7}+\frac{9}{2\cdot 3\cdot 7}+\frac{10}{2\cdot 3\cdot 7}=$$

$$=\frac{54}{2\cdot 3\cdot 7}=\frac{2\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 7}=\frac{9}{7}$$

Svar: $\frac{9}{7}$

3) $(4x-2)^2-(x+2)\cdot(x-1)+5x+15=16x^2-16x+4-(x^2+2x-x-2)+5x+15=$

$=16x^2-16x+4-x^2-2x+x+2+5x+15=15x^2-12x+21$

Svar: $15x^2-12x+21$

4) $f(x)=\frac{5}{\sqrt[9]{x^4}}+3x^{10}+e^{-12x}+2\sqrt{3}=5\cdot x^{-\frac{4}{9}}+3x^{10}+e^{-12x}+2\sqrt{3}$

$f'(x)=5\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot x^{-\frac{13}{9}}+3\cdot 10\cdot x^9+(-12)\cdot e^{-12x}+0=-\frac{20}{9}\cdot x^{-\frac{13}{9}}+30x^9-12e^{-12x}=$

$$= -\frac{20}{9\cdot\sqrt[9]{x^{13}}} + 30x^9 - 12e^{-12x}$$

Svar: $f'(x) = -\frac{20}{9\cdot\sqrt[9]{x^{13}}} + 30x^9 - 12e^{-12x}$

5) Maxima, minima och terrasspunkter finner man i punkter där förstaderivatan är noll (stationära punkter) eller i definitionsmängdens ändpunkter. Denna funktions definitionsmängd saknar ändpunkter, så det räcker att undersöka derivatans nollställen:

$$f(x) = 2x^4 - 2x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 8x^3 - 4x$$

$$f'(x) = 8x^3 - 4x = (8x^2 - 4)\cdot x = 0$$

$8x^2 - 4 = 0$ eller $x = 0$

$$x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Det finns alltså tre stationära punkter. Undersök deras karaktär:
Teckenschema:

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$8x^2 - 4$	+	0	-	-	-	0	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	avtar	Minpunkt	växer	Maxpunkt	avtar	Minpunkt	växer

(Man kan även göra en undersökning m.h.a. andraderivatan)

$$f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}})^4 - 2\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = -\frac{1}{2}$$

$$f(0) = 2\cdot 0^4 - 2\cdot 0^2 = 0$$

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^4 - 2\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = -\frac{1}{2}$$

Svar: Två minpunkter i $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ och $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$. En maxpunkt i $(0,0)$. Ingen terrasspunkt.

6) Cosinussatsen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$
Den största vinkeln står mot den längsta sidan. Låt A vara den största vinkeln i triangeln, då blir a den längsta sidan (20 m):

$$20^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos A \quad \Rightarrow \quad \cos A = \frac{20^2 - 15^2 - 10^2}{-2 \cdot 15 \cdot 10} = -0{,}25 \quad \Rightarrow \quad A \approx 104°$$

(Man kan naturligtvis beräkna samtliga vinklar och ser då vilken som är störst)

Svar: 104°.

Rättningsmall

Generella riktlinjer för tentamensrättning

Varje beräkningsfel	-1 poäng
(Därefter fortsatt rättning enligt nya förutsättningar)	
Beräkningsfel; allvarliga och/eller leder till förenkling	-2 poäng eller mer
Prövning istället för generell metod	- samtliga poäng
Felaktiga antaganden/ansatser	- samtliga poäng

Lösning svår att följa och/eller Svaret framgår inte tydligt	-1 poäng eller mer
Om '=' saknas (t.ex. '=>' används istället)	-1 poäng/tenta
Om '=' används felaktigt (t.ex. istället för '=>')	-1 poäng/tenta

Teoretiska uppgifter:

Avrundat svar	-1 poäng/tenta

Tillämpade uppgifter:

Enhet saknas/fel	-1 poäng/tenta
Avrundningar i delberäkningar som ger fel svar	-1 poäng/tenta
Svar med felaktigt antal värdesiffror (±1 värdesiffra ok)	-1 poäng/tenta
Andra avrundningsfel	-1 poäng/tenta

Specifika uppgifter

1. Varje saknad lösning	-1p
2. Bestämmer ett närmevärde m. h. a. räknare	0p
Svarar med ett korrekt beräknat bråk, som inte har förkortats så långt det går	-1p
3. Enstaka algebraiskt fel	-1p
Ofullständigt förenklat svar	-1p
4. Varje felaktigt deriverad term	-1p
Korrekt svar på potensform i stället för med en rot (första termen).	-0p
5. Beräknar ej funktionsvärden i min- och maxpunkter.	-1p
Punkternas karaktär ej bestämd / felaktigt bestämd	-1p
Varje saknat nollställe till derivatan	-1p
6. Beräknar enbart största vinkeln utan att på något sätt motivera varför denna vinkel måste vara störst	-1p