KTH Matematik

Tentamen del 1
SF1524, 2019-03-15, kl 8.00-11.00,
Grundläggande numeriska metoder och programmering

Namn: ....

Personnummer:.. **Program och årskurs:** ....

Max antal poäng på denna del är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 11 poäng. Endast ett korrekt svar per uppgift. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på dessa papper. Skriv namn på varje sida.

1. Integralen

$$\int_0^2 \frac{\sin(2\pi x)}{1+x^2}dx$$

approximeras med trapetsregeln.

(2p) **a)** Vad blir det approximativa värdet om steglängden $h = 1.0$?

☐ -1 ☒ 0 ☐ $4/5$ ☐ $1/3$ ☐ $-1/2$ ☐ 2 ☐ $-1/3$

(1p) **b)** Vilken noggrannhetsordning har trapetsregeln?

☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4

(1p) **2.** Differentialekvationen

$$y'' + \epsilon(t^2-1)y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

ska skrivas om som ett system av första ordningen. Vilket av nedanstående system ger en korrekt omskrivning av differentialekvationen?

☐ $u_1' = u_2$, $u_2' = -\epsilon(u_1^2-1)u_1 + u_2$

☐ $u_1' = u_2$, $u_2' = -\epsilon(t^2-1)u_2' - u_1'$

☐ $u_1' = u_1$, $u_2' = -\epsilon(t^2-1)u_2 - u_1$

☒ $u_1' = u_2$, $u_2' = -\epsilon(t^2-1)u_2 - u_1$

☐ $u_1' = u_2$, $u_2' = u_3$, $u_3' = -\epsilon(t^2-1)u_3 - u_2$

Var god vänd

(2p) **3.** Vilka utsagor är rätt och vilka är fel?
(Poängsättning: 1-3 korrekta svar=0 p, 4-5 korrekta svar=2 p.)

a) Ekvationen $f(x) = 0$, där $f(x) = e^{x^2} - 1/x$, har en lösning $\alpha \approx 0.65$. Newtons metod konvergerar om startgissningen är tillräkligt nära α.

[x] rätt [ ] fel

b) Noggrannhetsordningen för Simpson regeln är fyra.

[x] rätt [ ] fel

c) För att lösa det överbestämda systemet $Ax \approx b$ med minstakvadratmetoden löser man ett linjärt ekvationssystem på formen $AA^\top Ax = b$.

[ ] rätt [x] fel

d) I normalekvationerna är matrisen kvadratisk.

[x] rätt [ ] fel

e) När man löser differentialekvationen $y' = \sin(y) - \exp(y)$ kräver varje tidssteg mer beräkningstid för implicita metoder än för explicita metoder.

[x] rätt [ ] fel

(2 p) **4.** Tre punkter (x_i, y_i) är givna: $(-3, 0)$, $(0, 5)$ och $(3, -4)$. De ska anpassas till en cirkel med radien r och medelpunkt $(0, 0)$ i minstakvadratmening, dvs felkvadratsumman $\sum_{i=1}^{3} \left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - r\right)^2$ ska minimeras. Vad blir radien r?

[ ] 5	[x] 13/3
[ ] 9/2	[ ] 21/5
[ ] 4	[ ] 11/3
[ ] 17/4	[ ] 3

Var god vänd

(2p) **5.** En iterativ metod har använts till att lösa den ickelinjära ekvationen $f(x) = 0$. Tabellen nedan visar felet e_k vid iteration k

k	1	2	3	4
e_k	0.31	0.09	0.0271	0.00812

Vilken konvergensordning har metoden?

[x] 1 [ ] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 6 [ ] 7 [ ] 8

(2p) **6.** En numerisk kvadraturmetod har använts för att beräkna en integral. Tabellen nedan visar felet e_h vid steglängd h

h	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
e_h	1.0	0.26	0.0621	0.015

Vilken noggrannhetsordning har metoden?

[ ] 1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 6 [ ] 7 [ ] 8

(2p) **7.** Funktionen nedan är given.

```
function y = foo( x1, x2 )
A = [ 2 0 ; 0 2 ];
v = [ x1 ; x2 ];
for k=0:2
    if (x2 < x1 )
        v=A*v;
    end
end
y = v(2);
end
```

Resultatet av anropet `foo(1, -1)` blir

[ ] -2 [ ] -4 [ ] 0 [ ] 8

[ ] 4 [x] -8 [ ] 16 [ ] -1

(2p) **8.** Givet ekvationen $\sin(2\pi x) = 5\pi - x^2\pi$. En iteration med Newtons metod och startgissning $x_0 = 1$ ger x_1 lika med:

[ ] 0 [ ] -1 [ ] -2 [ ] 3

[ ] 1 [x] 2 [ ] -3 [ ] -4

Var god vänd

(2p) **9.** Givet tabellen nedan

x_i	-1	1	2
y_i	-1	1	-1

Kvadratisk interpolation (approximation med ett andragradspolynom) ska användas för att hitta ett polynom p med $p(x_i) = y_i$ för alla i. Om man använder polynomet för att extrapolera värdet i $x = -3$, vad får man för $p(-3)$?

☐ 1 ☐ 8 ☐ 0 ☐ -7

☐ -3 ☐ 14 ☒ -11 ☐ -9

(2p) **10.** Differentialekvationen

$$y''' = 8t - y' - y^2, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 2, \quad y''(1) = 1$$

ska lösas med hjälp av `ODE45`. För att göra detta skriver du om differentialekvationen som ett system av första ordningens ODE:er.

I ett MATLAB-program finns följande rader kod

```
clear all
t0=1;
T=3;
u0 = [3 2 1]';
[t U] = ode45(@HLfun,[t0 T],u0);
```

där funktionen `HLfun` i anropet till `ODE45` definierar systemets högerled.

Vilken av nedanstående funktioner är korrekt för ovanstående problem

☐
```
function F = HLfun(t,u)
  F = [u(1);u(2);8*t-u(1)-u(2)^2];
end
```

☒
```
function F = HLfun(t,u)
  F = [u(2);u(3);8*t-u(2)-u(1)^2];
end
```

☐
```
function F = HLfun(t,u)
  F = [u(1);u(2);8*t-u(3)-u(3)^2];
end
```

☐
```
function F = HLfun(t,u)
  F = [u(3);u(2);8*t-u(1)-u(1)^2];
end
```

☐
```
function F = HLfun(t,u)
  F = [u(2);u(3);8*t-u(3)-u(2)^2];
end
```

☐
```
function F = HLfun(t,u)
  F = [u(1);u(2);8*t-u(2)-u(1)^2];
end
```