

Tentamen del 2

SF1524, 2019-03-15, kl 8.00-11.00,

Grundläggande numeriska metoder och programmering

Del 2, Max 50p.

Rättas endast om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

P1. Vi vill lösa ekvationen $x + \ln(x) = 0$, som har en rot $x^* \approx 0.5$. Betrakta följande iterationsformler:

$$(1) \quad x_{n+1} = -\ln(x_n),$$

$$(2) \quad x_{n+1} = e^{-x_n},$$

$$(3) \quad x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2},$$

med $n = 0, 1, 2, \dots$

- (3 p) (a) Vilka av dessa iterationsformler kan användas?
- (3 p) (b) Vilken av dessa iterationsformler är bäst att använda?
- (4 p) (c) Konstruera en ännu bättre iterationsformel.

P2. Givet mätpunkterna

x	3	5	7
y	2	6	-22

- (3 p) (a) Interpolera ett polynom med så lågt gradtal som möjligt genom de tre punkterna.
- (2 p) (b) Givet interpolationspolynomet i uppgift (a), vad blir $y(4)$?
- (3 p) (c) En ny punkt $(2, 3)$ läggs till. Interpolera ett polynom genom de fyra punkterna.
- (4 p) (d) Om den nya punktens y-värde störs med ± 0.5 , hur mycket påverkas då koefficienten i den term med högst gradtal? Interpolation genom de fyra punkterna avses.
- (5 p) (e) Skriv ett MATLAB-program som anpassar

$$y = c_1 x + c_2 \sin(x)$$

i minstakvadratmening till de tre punkterna i uppgift (a).

Var god vänd

P3. Givet begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 10t \frac{dy}{dy} = 0, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 1. \quad (1)$$

- (2 p) **(a)** Skriv om differentialekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer. Glöm inte begynnelsevillkoren.
- (4 p) **(b)** Beräkna en approximation (genom att räkna för hand) av $y(0.4)$ och $y'(0.4)$ med framåt Euler med steglängden $h = 0.2$.
- (2 p) **(c)** Antag att du får en MATLAB-funktion `y=feuler(n)` som löser begynnelsevärdesproblemet (1) i intervallet $t \in [0, 0.4]$ med steglängden $h = 0.4/n$. Den returnerar en vektor $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ med de approximerade värdena $y_0, y_1, \dots, y_n$. Visa hur man i MATLAB kan använda dessa för att approximera integralen

$$I = \int_0^{0.4} y(t) dt,$$

med trapetsregeln.

- (2 p) **(d)** När man undersöker konvergensen för approximationen av I i deluppgift (c) märker man att noggrannhetsordningen bara är ett, trots att trapetsregeln är en andra ordningens metod. Vad beror det på?
- (2 p) **(e)** Hur skulle man kunna ändra lösningsförfarandet för att få noggrannhetsordning 2?

P4. Betrakta följande ekvation

$$f(k) = \int_3^6 \cos(1 + kx^2) dx - k = 0. \quad (2)$$

- (3 p) **(a)** Låt $k_0 = 0$ vara en startgissning och gör en iteration med Newtons metod. Vad blir k_1 ?
- (6 p) **(b)** Skriv ett MATLAB-program som bestämmer en lösning k^* till ekvation (2). För full poäng ska programmet vara effektivt.
- (2 p) **(c)** Beskriv hur man kan uppskatta felet i det beräknade värdet på k^* .