Tentamen, del 1
SF1524
Grundläggande numeriska metoder och programmering
Fredag 13 mars 2020 kl 8.00-11.00

Namn: ....

Personnummer: ....

Program och årskurs: ....

Max antal poäng är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 12 poäng. Endast ett korrekt svar per uppgift. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på dessa papper. Skriv namn och personnummer på varje sida.

(2 p) **1.** Låt $p(x)$ vara det andragradspolynom som interpolerar punkterna i tabellen nedan. Vilket värde har $p(2)$?

x_i	-1	0	1
y_i	3	1	1

☐ -4 ☐ -3 ☐ -2 ☐ -1 ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☑ 3 ☐ 4

(2 p) **2.** Betrakta den ickelinjära ekvationen

$$e^x = 10\cos(x).$$

Utför ett steg med Newton-Raphsons metod och startgissning $x_0 = 0$ för att approximera lösningen till ekvationen ovan. Vad blir x_1?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☑ 9 ☐ 10

3. Nedanstående Matlab-program körs.

```
f = @(x) 3x.^2;

n = 2;
a = 0;
b = 2;
h = (b - a) / n;
Qh = 0;

for i = 0:n-1
    xi = h * i;
    Qh = Qh + h/6*(f(xi) + 4*f(xi + h/2) + f(xi + h));
end

disp(strcat('Q(h)=', num2str(Qh)));
```

(2p) **a)** Vad blir utskriften av programmet?

- ☐ `Q(h)=0`
- ☐ `Q(h)=4`
- ☑ `Q(h)=8`
- ☐ `Q(h)=1`
- ☐ `Q(h)=5`
- ☐ `Q(h)=9`
- ☐ `Q(h)=2`
- ☐ `Q(h)=6`
- ☐ `Q(h)=10`
- ☐ `Q(h)=3`
- ☐ `Q(h)=7`
- ☐ `Q(h)=11`

(1p) **b)** Vilken numerisk metod är implementerad i ovanstående Matlab-program?

- ☐ Mittpunktsformeln
- ☐ Framåt Euler
- ☐ Bakåt Euler
- ☐ Fixpunktsiteration
- ☐ Trapetsmetoden
- ☐ Sekantmetoden
- ☑ Simpsons formel
- ☐ Newtons metod
- ☐ Runge-Kutta 4

(1p) **c)** Hur stort är felet i beräkningen om man bortser från avrundningsfel?

- ☑ 0
- ☐ 0.01
- ☐ 0.3
- ☐ 0.007
- ☐ 10^{-3}
- ☐ 0.17
- ☐ 0.33
- ☐ 0.56

x_i	-1	0	1	2
y_i	4	5	3	3

4. Givet datapunkterna i tabellen ovan, ska $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ bestämmas med minsta kvadratmetoden.

(2 p) **a)** Vilket är det överbestämda ekvationssystem $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ som måste lösas?

☑ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & (-1)^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} (-1)^2 & -1 & 1 \\ 0^2 & 0 & 1 \\ 1^2 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 4^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(1 p) **b)** Vad kallas matrisen A i ekvationssystemet $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ ovan?

☐ Eulermatrisen
☐ Polynommatrisen
☐ Rungematrisen
☐ Kvadratmatrisen
☐ Interpolationsmatrisen
☐ Minstakvadratmatrisen
☐ Normalmatrisen
☑ Vandermondematrisen

(1 p) **c)** Vilka är normalekvationerna till det överbestämda ekvationssystemet $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$?

☐ $AA^T\,\mathbf{c} = A\,\mathbf{b}$
☑ $A^TA\,\mathbf{c} = A^T\,\mathbf{b}$
☐ $A^TA\,\mathbf{c} = A\,\mathbf{b}$
☐ $AA^T\,\mathbf{c} = A\,\mathbf{c}$
☐ $A^TA\,\mathbf{c} = A^T\,\mathbf{c}$
☐ $A^T\,\mathbf{c} = A\,\mathbf{b}$
☐ $AA^T\,\mathbf{c} = \mathbf{b}\,A^T$
☐ $A^TA\,\mathbf{c} = A^T\,A\,\mathbf{c}$
☐ $A^T\,\mathbf{c} = A^T\,\mathbf{b}$

5. Betrakta den ordinära differentialekvationen (ODE:n)

$$y''(x) + xy'(x) - 2y(x) = 1, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

(2 p) **a)** Vilken är en korrekt omskrivning av ODE:n som ett system av första ordningens ODE:er?

☐ $\begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(0) = 0, \\ y_2' = xy_1 + 2y_2 + 1, & y_2(0) = 0. \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(0) = 0, \\ y_2' = -xy_1 + 2y_2 + 1, & y_2(0) = 1. \end{cases}$

☑ $\begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(0) = 0, \\ y_2' = -xy_2 + 2y_1 + 1, & y_2(0) = 1. \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} y_1' = y_1, & y_1(0) = 0, \\ y_2' = -xy_1 + 2y_2 + 1, & y_2(0) = 1. \end{cases}$

☐ $\begin{cases} y_1' = y_1, & y_1(0) = 0, \\ y_2'' = -xy_2 + 2y_1 + 1, & y_2(0) = 0. \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} y_1' = y_2, & y_1(0) = 0, \\ y_2'' = -xy_2 + 2y_1 + 1, & y_2(0) = 1. \end{cases}$

(2 p) **b)** Två steg med Euler framåt (explicit Euler) och steglängd $h = 1$ ger approximationen

☐ $y(2) \approx$ -3 ☐ $y(2) \approx$ -1 ☐ $y(2) \approx 1$ ☑ $y(2) \approx 3$

☐ $y(2) \approx$ -2 ☐ $y(2) \approx 0$ ☐ $y(2) \approx 2$ ☐ $y(2) \approx 4$

(2 p) **c)** Anta att du har använt Eulers metod med steglängd h och uppskattar felet i approximationen till $y(2)$ till $e_h \approx 10^{-2}$. Om du vill minska felet med en faktor 100 till $e_h \approx 10^{-4}$, hur ska du då välja steglängden?

☐ $h/2$ ☐ $h/10$ ☐ $h/50$ ☐ $h/1000$

☐ $h/4$ ☐ $h/25$ ☑ $h/100$ ☐ $h/10000$

(2 p) **6.** En iterativ metod har använts för att lösa den ickelinjära ekvationen $f(x) = 0$ och har gett följande utskrift

k	1	2	3	4	5
$e_k = \lvert x_k - x_{k-1}\rvert$	$6.25 \cdot 10^{-1}$	$1.17 \cdot 10^{-1}$	$7.78 \cdot 10^{-3}$	$3.05 \cdot 10^{-5}$	$4.66 \cdot 10^{-10}$

Vilken konvergensordning har metoden?

☐ 0 ☑ 2 ☐ 4 ☐ 6

☐ 1 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 7