KTH Engineering Sciences

Tentamen 2020-05-25
Del 1

SF1547 – Numeriska metoder

Max antal poäng på denna del är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 11 poäng. Endast ett korrekt svar per uppgift. Om denna del av tentamen (Del 1) blir godkänd så rättas även Del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Skriv alla svar på denna del på ett och samma papper.
Skriv bara uppgiftsnummer och ditt valda svarsalternativ (A,B,C, ...), inga uträkningar.
Skriv "Del 1" överst på pappret samt ditt namn och personnummer.

---

1. Allmänna gaslagen säger att (2 p)

$$pV = nT,$$

där p är trycket, V volymen, T temperaturen och n molmängden, uttryckt i lämpliga enheter. Givet p, n och T med felgränser,

$$p = 800 \pm 10, \qquad n = 20 \pm 1, \qquad T = 320 \pm 8.$$

Vad blir felgränsen i V?

A. 0.05 **B.** 0.30 **C.** 0.40 **D.** 0.55 **E.** 0.70 **F.** 0.95

Lösning: E. Eftersom felfortplantningsformeln ger:

$$E_V \approx E_p \left|\frac{nT}{p^2}\right| + E_n \left|\frac{T}{p}\right| + E_T \left|\frac{n}{p}\right| = 10 \left|\frac{6400}{640000}\right| + 1 \left|\frac{320}{800}\right| + 8 \left|\frac{20}{800}\right| = \frac{560}{800} = 0.7.$$

---

2. Vi approximerar $f'(x)$ med framåtdifferensen (1 p)

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

där parametern $h = 0.004$. Felet blir då $1.2 \cdot 10^{-3}$. Ungefär hur stort blir felet när $h = 0.002$?

A. $0.1 \cdot 10^{-3}$ **B.** $0.2 \cdot 10^{-3}$ **C.** $0.3 \cdot 10^{-3}$ **D.** $0.4 \cdot 10^{-3}$
E. $0.5 \cdot 10^{-3}$ **F.** $0.6 \cdot 10^{-3}$ **G.** $0.7 \cdot 10^{-3}$ **H.** $0.8 \cdot 10^{-3}$

Lösning: F. Framåtdifferens är en första ordningens metod så när man halverar h halveras också felet, vilket alltså blir $0.6 \cdot 10^{-3}$.

3. Vi approximerar $f'(x)$ med centraldifferensen (1 p)

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

där parametern $h = 0.004$. Felet blir då $1.2 \cdot 10^{-3}$. Ungefär hur stort blir felet när $h = 0.002$?

A. $0.1 \cdot 10^{-3}$ **B.** $0.2 \cdot 10^{-3}$ **C.** $0.3 \cdot 10^{-3}$ **D.** $0.4 \cdot 10^{-3}$
E. $0.5 \cdot 10^{-3}$ **F.** $0.6 \cdot 10^{-3}$ **G.** $0.7 \cdot 10^{-3}$ **H.** $0.8 \cdot 10^{-3}$

Lösning: C. Centraldifferens är en andra ordningens metod så när man halverar h divideras felet med fyra, vilket alltså blir $0.3 \cdot 10^{-3}$.

---

4. Ekvationen $e^{x^2} = 1.2 - x$ ska lösas. Gör ett steg med Newtons metod och startgissningen $x_0 = 0$. Vad blir resultatet x_1? (2 p)

A. 0.05 **B.** 0.10 **C.** 0.20 **D.** 0.40 **E.** 0.45 **F.** 0.60

Lösning: C. Med $f(x) = e^{x^2} - 1.2 + x$ blir Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{e^{x_n^2} - 1.2 + x_n}{2x_n e^{x_n^2} + 1}.$$

Sätter vi in $x_0 = 0$ får vi $x_1 = 0.2$.

---

5. Newtons metod har kvadratisk konvergens. Vad innebär det om felet i iteration n betecknas e_n? (2 p)

A. $\dfrac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \approx 1/2$ **B.** $\dfrac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \approx 2$ **C.** $\dfrac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} \approx \text{konstant}$ **D.** $\dfrac{|e_n|}{|e_{n+1}|^2} \approx \text{konstant}$

E. $|e_n||e_{n+1}| \approx \text{konstant}$ **F.** $|e_n| \approx \text{konstant}$ **G.** $\dfrac{|e_{n+1}|^2}{|e_n|^2} \approx \text{konstant}$ **H.** $\dfrac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{1/2}} \approx \text{konstant}$

Lösning: C. Se definition i bok/föreläsningsanteckningar.

---

6. Vi löser ODE-systemet (2 p)

$$\begin{aligned} x' &= x + y, & x(0) &= 1, \\ y' &= x + 2y, & y(0) &= 2, \end{aligned}$$

med Framåt Euler. Vad blir approximationen av $y(0.1)$ efter ett steg med steglängden $h = 0.1$?

A. 1.3 **B.** 1.5 **C.** 1.6 **D.** 1.9
E. 2.1 **F.** 2.3 **G.** 2.4 **H.** 2.5

Lösning: H. Framåt Euler blir

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h(x_n + y_n), & x_0 &= 1, \\ y_{n+1} &= y_n + h(x_n + 2y_n), & y_0 &= 2, \end{aligned}$$

Approximationen av $y(0.1)$ är y_1. Med insatta värden $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ blir $y_1 = 2 + h(1 + 2 \cdot 2) = 2 + 5h = 2.5$.

7. Beräkna integralen (2 p)

$$\int_{-0.5}^{0.5} \frac{\sqrt{9-20x^2}}{1+x^2} dx$$

med (sammansatta) trapetsregeln och steglängden $h = 0.5$. Vad blir svaret?

A. 1.5	**B.** 1.9	**C.** 2.3	**D.** 2.4
E. 3.1	**F.** 4.6	**G.** 6.2	**H.** 12.4

Lösning: **C.** Trapetsregeln är

$$T_h = h\left(\frac{f(-0.5)}{2} + f(0) + \frac{f(0.5)}{2}\right), \qquad f(x) = \frac{\sqrt{9-20x^2}}{1+x^2}.$$

Med $f(-0.5) = f(0.5) = 1.6$, $f(0) = 3$ och $h = 0.5$ får vi $T_h = 2.3$.

Det tar 10 sekunder att lösa ett linjärt ekvationssystem, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, med 2000 ekvationer och 2000 obekanta på en dator. Hur lång tid tar det då, ungefär, att lösa ett system med 6000 ekvationer och 6000 obekanta på samma dator om…

8. Matrisen A är fylld? (1 p)

A. 40 s **B.** 60 s **C.** 80 s **D.** 90 s **E.** 180 s **F.** 270 s

Lösning: **F.** Lösning av fyllda ekvationssystem har komplexitet $O(n^3)$. När problemstorleken n tredubblas, tar lösningen då ca $3^3 = 27$ gånger längre tid. Svaret blir alltså 270 s.

9. Matrisen A är triangulär? (1 p)

A. 40 s **B.** 60 s **C.** 80 s **D.** 90 s **E.** 180 s **F.** 270 s

Lösning: **D.** Lösning av triangulära ekvationssystem har komplexitet $O(n^2)$. När problemstorleken n tredubblas, tar lösningen då ca $3^2 = 9$ gånger längre tid. Svaret blir alltså 90 s.

Vi använder finitadifferensmetoden för att lösa randvärdesproblemet

$$u''(x) - u(x) = f(x), \qquad u(0) = 10, \quad u(1) = 0.$$

När steglängden $h = 1/(n+1)$, $x_j = jh$ och $u_j \approx u(x_j)$ får vi det linjära ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & \\ 1 & \alpha & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \alpha & 1 \\ & & & 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f(x_1) + \beta \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ h^2 f(x_{n-1}) \\ h^2 f(x_n) \end{pmatrix}.$$

10. Vad är α? (2 p)

A. -2 **B.** -3 **C.** 1 **D.** $-2 + h^2$ **E.** $-2 - h^2$ **F.** $2 - h^2$

Lösning: E. Diskretiseringen vid första inre punkten x_1 är

$$\frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{h^2} - u_1 = f(x_1) \quad \Rightarrow \quad \{u_0 = 10\} \quad \Rightarrow \quad -(2 + h^2)u_1 + u_2 = h^2 f(x_1) - 10.$$

Identifiering ger $\alpha = -2 - h^2$ och $\beta = -10$.

11. Vad är β? (1 p)

A. -10 **B.** 10 **C.** $-10h^2$ **D.** $10h^2$ **E.** $-10 + h^2$ **F.** $10 + h^2$

Lösning: A. Se lösning till uppgift 10.

Hastigheten $v(t)$ hos en bil vid olika tidpunkter t är given som

t	10 s	20 s	30 s
$v(t)$	10 m/s	14 m/s	10 m/s

12. Använd kvadratisk interpolation för att approximera hastigheten $v(25)$. (2 p)
Resultatet blir (i m/s):

A. 11.0 **B.** 11.5 **C.** 12.5 **D.** 13.0 **E.** 13.5 **F.** 14.5

Lösning: D. Newtons ansats $v(t) = c_0 + c_1(t-10) + c_2(t-10)(t-20)$ ger villkoren

$$10 = v(10) = c_0, \qquad 14 = v(20) = c_0 + 10c_1, \qquad 10 = v(30) = c_0 + 20c_1 + 200c_2.$$

Det ger $c_0 = 10$, $c_1 = 0.4$ och $c_2 = -0.04$. Det ger $v(25) = 10 + 0.4 \cdot 15 - 0.04 \cdot 15 \cdot 5 = 13$.

13. Använd kvadratisk interpolation för att approximera accelerationen $v'(20)$. (1 p)
Resultatet blir (i m/s^2):

A. -1.5 **B.** -1.0 **C.** -0.6 **D.** 0.0 **E.** 0.4 **F.** 1.0

Lösning: D. Från resultatet i uppgift 12 får vi $v'(t) = 0.4 - 0.04(2t - 30)$, vilket ger $v'(20) = 0$. (Alternativt kan man se detta direkt pga symmetrin hos datapunkterna.)