KTH Matematik/Anna Nissen

Tentamen del 1
Numeriska beräkningar SF1522
2019-04-15, 14.00-17.00.

Namn: ....

Personnummer:.. **CDEPR, årskurs:** ....

Bonuspoäng. Ange dina bonuspoäng från kursomgången HT18 här:

Kontrollskrivning. Ange om du är godkänd på kontrollskrivning HT18 (ja/nej):

Max antal poäng är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng). Om du är godkänd på kontrollskrivningen så behöver du ej göra sista uppgiften, utan den räknas till full poäng. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på detta papper.

1. (2p) Antag att det tar 1 s på en specifik dator att lösa ett undertriangulärt linjärt system med 1000 ekvationer och 1000 obekanta. Hur lång tid (i s) tar det för samma dator att lösa ett undertriangulärt linjärt ekvationssystemen med 5000 ekvationer och 5000 obekanta?

☐ 5 ☐ 15 ☐ 50 ☐ 125

☐ 10 ☑ 25 ☐ 75 ☐ 500

Lösning: Ett triangulärt system med n ekvationer och n obekanta kräver n^2 operationer, datorn gör då $1000^2 = 10^6$ operationer per sekund. Att lösa ett problem med 5000 ekvationer och 5000 obekanta kräver $5000^2 = 25 \cdot 10^6$ operationer, dvs det tar $\frac{25 \cdot 10^6 op.}{10^6 op/s} =$ 25 s.

2. (2p) Använd minstakvadrat-metoden för att anpassa funktionen $y(x) = \frac{a}{x} + bx$ till värdena i tabellen

x	1	2	4
y	2	16	5

Vad blir a? (1p)

- ☐ -2
- ☐ -1
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☑ 4

Vad blir b? (1p)

- ☐ -2
- ☐ -1
- ☐ 1
- ☑ 2
- ☐ 3
- ☐ 4

Lösning: Vi ställer upp Vandermondematrisen A respektive matrisen A^TA för normalekvationerna $A^TA\bar{x} = A^Ty$, där $\bar{x} = [a, b]^T$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{4} & 4 \end{bmatrix}, \quad A^TA = \begin{bmatrix} \frac{21}{16} & 3 \\ 3 & 21 \end{bmatrix},$$

högerledet för normalekvationerna blir

$$A^Ty = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{4} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{45}{4} \\ 54 \end{bmatrix}.$$

Utifrån ekvationssystemet

$$\frac{21}{16}a + 3b = \frac{45}{4}$$
$$3a + 21b = 54$$

får vi genom att subtrahera sju gånger den första ekvationen från den andra att $3a - 7 \cdot \frac{21}{16}a = 54 - 7 \cdot \frac{45}{4}$, dvs $a = \frac{\left(54 - 7 \cdot \frac{45}{4}\right)}{3 - 7 \cdot \frac{21}{16}} = 4$. Insatt i den första ekvationen ger detta $\frac{21}{16} \cdot 4 + 3b = \frac{45}{4}$, dvs $b = \frac{24}{4 \cdot 3} = 2$.

3. (2p) En iterativ metod har använts till att lösa den ickelinjära ekvationen $f(x) = 0$. Tabellen nedan visar felet e_k vid iteration k.

k	1	2	3	4
e_k	0.0420	0.00353	$2.50 \cdot 10^{-5}$	$1.24 \cdot 10^{-9}$

Vilken konvergensordning har metoden?

- ☐ 1
- ☑ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6
- ☐ 7
- ☐ 8

Lösning: Vi får ungefär dubbelt så många korrekta decimaler för varje iteration, vilket tyder på konvergensordning 2, då skulle vi ha $e_{k+1} = K \cdot e_k^2$. För de två sista värdena får vi

$$K = \frac{1.24 \cdot 10^{-9}}{(2.50 \cdot 10^{-5})^2} = \frac{12.4 \cdot 10^{-10}}{6.25 \cdot 10^{-10}} \approx 2.$$

Testa om det stämmer för värdena för $k = 2, 3$:

$$e_3 \approx K \cdot e_2 \approx 2 \cdot 0.00353^2 \approx 2 \cdot 3.5^2 \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 12.25 \cdot 10^{-6} \approx 2.45 \cdot 10^{-5},$$

vilket stämmer väl överens med tabellvärdet för e_3. Vi har konvergensordning 2.

4. (2p) En integral har approximerats med en numerisk metod. Tabellen nedan visar felet e_h vid steglängd h.

h	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
e_h	1.5	0.094	0.0059	$3.66 \cdot 10^{-4}$

Vilken noggrannhetsordning har metoden?

☐ 1 ☐ 3 ☐ 5 ☐ 7

☐ 2 ☑ 4 ☐ 6 ☐ 8

Lösning: Noggrannhetsordningen p kan beräknas genom

$$\frac{e_h}{e_{h/2}} = 2^p.$$

Använd de två sista värdena

$$\frac{e_h}{e_{h/2}} = \frac{5.9 \cdot 10^{-3}}{3.66 \cdot 10^{-4}} \approx \frac{60}{3.6} = \frac{10}{0.6} \approx 16,$$

dvs $2^p \approx 16$, så att $p = 4$.

5. (2p) Använd linjär interpolation applicerat på mätdata i tabellen

x	-1	0
y	1.20	1.40

a) (1p) Vad blir y(-0.8) med linjär interpolation?

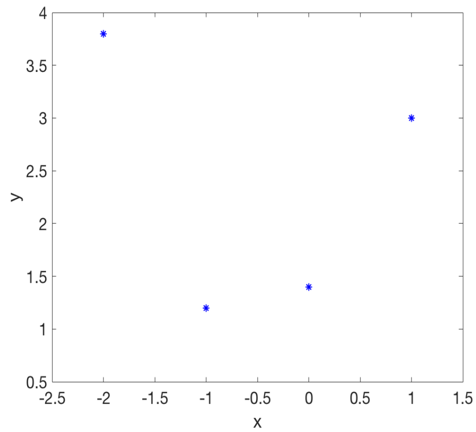
☐ 1.22 ☑ 1.24 ☐ 1.26 ☐ 1.28 ☐ 1.30 ☐ 1.32 ☐ 1.34

Med två ytterligare punkter enligt figuren nedan kan ett kubiskt polynom interpoleras till data.

b) (1p) y(-0.8) från kubisk interpolation antar ett värde som jämfört med värdet från linjär interpolation är

Namn: ....

Personnr:....................................



☐ högre ☑ lägre ☐ samma värde ☐ går inte att säga

Lösning:

a) Med linjär interpolation har vi ansatsen $y(x) = ax + b$. Sätt in värdena i tabellen, dessa ska uppfyllas exakt vid interpolation

$$y(-1) = a \cdot (-1) + b = 1.20,$$
$$y(0) = b = 1.40, \quad a = b - 1.20 = 0.2.$$

Vi får $y(-0.8) = 0.2 \cdot (-0.8) + 1.40 = -0.16 + 1.40 = 1.24$.

b) Med fyra värden får vi vid interpolation ett tredjegradspolynom och mellan $x = -1$ och $x = 0$ kommer tredjegradspolynomet gå under den linjära approximationen mellan punkterna. Värdet för $y(-0.8)$ från det kubiska polynomet kommer därför att anta ett värde under värdet från linjär interpolation.

6. (2p) Ekvationen $f(x) = \cos(0.5x) - x + \sqrt{x}$ har en rot x^* som ligger mellan 1.5 och 2. Villkoret för att fixpunktsiterationen $x_{n+1} = \cos(0.5x_n) + \sqrt{x_n}$ ska konvergera mot roten (givet tillräckligt bra startgissning) är

☐ $|\cos(0.5x^*) - x^* + \sqrt{x^*}| < 1$ ☐ $|-\sin(0.5x^*) - 2 + 1/\sqrt{x^*}| < 2$

☐ $|\cos(0.5x^*) - x^* + \sqrt{x^*}| > 1$ ☐ $|-\sin(0.5x^*) - 2 + 1/\sqrt{x^*}| > 2$

☐ $|\cos(0.5x^*) + \sqrt{x^*}| < 1$ ☑ $|-\sin(0.5x^*) + 1/\sqrt{x^*}| < 2$

☐ $|\cos(0.5x^*) + \sqrt{x^*}| > 1$ ☐ $|-\sin(0.5x^*) + 1/\sqrt{x^*}| > 2$

Lösning: Villkoret för konvergens för en fixpunktsiteration $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0, 1 \cdots$

till en rot x^* ges av $|g'(x^*)| < 1$. Vi deriverar $g(x) = \cos(0.5x) + \sqrt{x}$ vilket ger $g'(x) = -0.5\sin(0.5x) + 0.5/\sqrt{x}$. Villkoret blir $|-0.5\sin(0.5x^*) + 0.5/\sqrt{x^*}| < 1$, eller $|-\sin(0.5x^*) + 1/\sqrt{x^*}| < 2$.

Namn: ....
Personnr:....................................

---

7. (2p) Ett steg med Newton-Raphsons metod applicerat på ekvationen $x^3 - \cos(\pi x) = 0$ med startgissninge $x_0 = 1$ blir

☐ $-2/3$	☑ $1/3$	☐ $5/6$	☐ $3/2$
☐ $-5/6$	☐ $2/3$	☐ $6/5$	☐ 1

Lösning: Ett steg med Newton-Raphsons metod ges av

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \tag{1}$$

där $f(x) = x^3 - \cos(\pi x) = 0$, $f'(x) = 3x^2 + \pi \sin(\pi x)$. Vi får med $x_0 = 1$ $f(x_0) = f(1) = 1 - \cos(\pi) = 2$, $f'(x_0) = f'(1) = 3 + \pi \sin(\pi) = 3$, vilket ger

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}. \tag{2}$$

8. (2p) Trapetsregeln applicerad på integralen

$$\int_{-3}^{3} \frac{2}{1+x^2} dx,$$

med steglängd $h = 2$ ger resultatet

☐ $6/5$	☐ $11/5$	☐ $16/5$	☐ $24/5$
☐ $8/5$	☐ $12/5$	☑ $22/5$	☐ $33/5$

Lösning: Trapetsregeln med $h = 2$ applicerat på

$$\int_{-3}^{3} f(x) dx,$$

med $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ blir

$$\frac{h}{2}(f(-3) + 2f(-1) + 2f(1) + f(3)) = \frac{2}{2}\left(\frac{2}{1+(-3)^2} + 2 \cdot \frac{2}{1+(-1)^2} + 2 \cdot \frac{2}{1+(1)^2} + \frac{2}{1+(3)^2}\right) = \left(\frac{1}{5} + 2 + 2 + \frac{1}{5}\right) = \frac{22}{5}.$$

9. (2p) Följande MATLAB-kod är en implementering av en numerisk metod, vilken?

```
a=2; b=5; c=1; d=2; e=2;
while a<b;
  a=a+c;
```

```
  d=a^2;
  e=e+d;
end;
e=e-d/2;
f=c*e
```

- ☐ Fixpunktsiteration
- ☑ Trapetsregeln
- ☐ Sekantmetoden
- ☐ Bisektionsmetoden
- ☐ Linjär interpolation
- ☐ Kvadratisk interpolation
- ☐ Newton-Raphsons metod
- ☐ Minstakvadrat-metoden

Lösning: Koden applicerar trapetsregeln på integralen

$$\int_2^5 x^2 dx.$$

a,b är integralgränserna, c är steglängden som är 1, d är $\frac{x^2}{2} = \frac{f(2)}{2}$ och e summerar termerna $\frac{f(2)}{2}$, $f(3)$, $f(4)$, $\frac{f(5)}{2}$. Slutligen skalas summan i e med steglängden i c.

10. (2p) (Denna uppgift behöver du ej göra om du klarat kontrollskrivningen i MATLAB.) Funktionen nedan är given.

```
function y = fkn( x1, x2 )
A = [ 2 0 ; 0 2 ];
v = [ x1 ; x2 ];
for k=0:1
    if (x2 < x1 )
        v=A*v;
    end
end
y = v(2);
end
```

Resultatet av anropet `fkn(1, -1)` blir

- ☐ -2
- ☑ -4
- ☐ 0
- ☐ 8
- ☐ 4
- ☐ -8
- ☐ 16
- ☐ -1

Lösning: Med anropet `fkn(1, -1)` sätts `v` till $[1, -1]$. Första varvet i for-slingan när $k = 0$ har vi `x2 < x1` uppfyllt då -1 är mindre än 1 och `v` sätts till $[2, -2]$. Andra varvet i for-slingan när $k = 1$ har vi fortfarande `x2 < x1` uppfyllt (dessa variabler har inte förändrats) och `v` sätts till $[4, -4]$. `y` tilldelas värdet -4 och är utdata till funktionen, dvs resultatet av anropet.