KTH Matematik/Anna Nissen

Tentamen del 2
Numeriska beräkningar SF1522
2019-04-15, 14.00-17.00.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar för att undvika poängavdrag.
Del 2 rättas om del 1 är godkänd. Max antal poäng är 40.
Betygsgränser: D 8, C 16, B 24 och A 32 poäng.

1. (5p) Betrakta ekvationssystemen $Ax = b$ och $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, där $x, \Delta x, b, \Delta b \in \mathbb{R}^2$. Antag att $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$, och att man vill maximera kvoten $\frac{a_1}{a_2}$, där $a_1 > a_2$.

Antag också att den maximala relativa störningen $\|\Delta b\|_\infty / \|b\|_\infty$ är 10^{-8}.

a) (2p) Om $a_2 = 10$, $a_1 = 1000$, vad blir det relativa felet $\|\Delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$?

b) (3p) Antag att man vill att det relativa felet $\|\Delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$ maximalt ska anta värdet 10^{-3}. Hur stor kan kvoten $\frac{a_1}{a_2}$ maximalt vara för att det relativa felet ska vara inom den önskade felgränsen?

Lösning: Det relativa felet uppfyller enligt felförstärkningsformeln

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \text{cond}(A)_\infty \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

där $\text{cond}(A)_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$.

Då A är en diagonalmatris ges inversen till A av $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} \end{bmatrix}$. Eftersom att $a_1 > a_2$ blir $\|A\|_\infty = a_1$ och $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{a_2}$, dvs $\text{cond}(A)_\infty = \frac{a_1}{a_2}$.

a) Om $a_2 = 10$, $a_1 = 1000$ blir $\text{cond}(A)_\infty = \frac{a_1}{a_2} = \frac{1000}{10} = 100$. Det relativa felet är begränsat av

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 100 \cdot 10^{-8} = 10^{-6}.$$

b) Vi söker maximala kvoten $\frac{a_1}{a_2}$ där

$$10^{-3} \leq \frac{a_1}{a_2} \cdot 10^{-8}.$$

Detta gäller för $\frac{a_1}{a_2} \leq 10^5$, dvs kvoten $\frac{a_1}{a_2}$ kan maximalt vara 10^5.

2. (13p) Givet en tabell med fem mätvärden

x	2	3	4	5	6
y	1.2	1.5	1.6	1.4	1.1

a) (4p) Antag att du vill uppskatta det maximala värdet för y genom att interpolera ett kvadratiskt polynom. Beskriv i ord hur du kan använda data i tabellen för att göra detta.

b) (4p) Skriv ett MATLAB-program som bestämmer ett interpolationspolynom som går igenom samtliga punkter. Programmet ska även plotta polynomet och mätvärdena i samma figur.

c) (5p) Utöka programmet så att det även bestämmer integralen av interpolationspolynomet mellan $x = 2.3$ och $x = 5.8$.

Lösning:

a) Ett kvadratiskt polynom interpoleras med tre datapunkter. Det maximala värdet ligger mellan $x = 3$ och $x = 5$, använd därför de tre mittersta punkterna. Efter att det kvadratiska polynomet $y(x)$ har tagits fram kan vi derivera $y(x)$, maxvärdet för y fås då från $y'(x) = 0$, dvs om x^* ger att $y'(x^*) = 0$ ges maxvärdet av $y(x^*)$.

b) Förslag på MATLAB-program:

```
x = [2 3 4 5 6]';
y = [1.2 1.5 1.6 1.4 1.1]';
A = [x.^0 x x.^2 x.^3 x.^4];
pol = A\y;
xval = linspace(2,6);
pval=pol(1)+pol(2)*xval+pol(3)*xval.^2+pol(4)*xval.^3+pol(5)*xval.^4;

figure
plot(x,y,'*')
hold on
plot(xval,pval,'r')
```

c) Det går att använda en inbyggd integrallösare i MATLAB, koden blir då

```
x = [2 3 4 5 6]';
y = [1.2 1.5 1.6 1.4 1.1]';
A = [x.^0 x x.^2 x.^3 x.^4];
pol = A\y;

xval = linspace(2,6);
pval=pol(1)+pol(2)*xval+pol(3)*xval.^2+pol(4)*xval.^3+pol(5)*xval.^4;

figure
plot(x,y,'*')
hold on
plot(xval,pval,'r')
```

```
px = @(x) pol(1)+pol(2)*x+pol(3)*x.^2+pol(4)*x.^3+pol(5)*x.^4;

I = integral(px,2.3,5.8);
```

Alternativt kan man använda t ex Trapetsregeln med en liten steglängd, om vi tar h från den finfördelade kurvan som plottas blir koden:

```
x = [2 3 4 5 6]';
y = [1.2 1.5 1.6 1.4 1.1]';
A = [x.^0 x x.^2 x.^3 x.^4];
pol = A\y;

xval = linspace(2,6);
pval=pol(1)+pol(2)*xval+pol(3)*xval.^2+pol(4)*xval.^3+pol(5)*xval.^4;

figure
plot(x,y,'*')
hold on
plot(xval,pval,'r')

Th = h/2*(pval(1) + pval(end)) + h*sum(pval(2:end-1));
```

3. (9p) Vi vill givet data i tabellen

x	0	1	2
y	1	2	5

anpassa en funktion av typen

$$y(x) = kx\left(1 + \frac{ax}{1+bx}\right).$$

a) (4p) Antag att $a = b = 0$. Använd alla mätvärden i tabellen och bestäm parametern k med minstakvadrat-metoden.

b) (5p) Antag nu att bara $b = 0$. Använd alla mätvärden i tabellen och bestäm parametrarna k och a med minstakvadrat-metoden.

Lösning:

a) Med $a = b = 0$ får vi ansatsen $y(x) = kx$, dvs en parameter att bestämma. Vandermondematrisen respektive matrisen A^TA (som blir en skalär) för normalekvationerna $A^TAk = A^Ty$ blir

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A^TA = 5,$$

högerledet för normalekvationerna blir

$$A^Ty = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 12,$$

vilket ger $k = \frac{A^T y}{A^T A} = \frac{12}{5}$.

b) Med $b = 0$ får vi ansatsen $y(x) = kx + kax^2$. Låt $\beta = ka$ så har vi $y(x) = kx + \beta x^2$. Vi ställer upp Vandermondematrisen respektive matrisen $A^T A$ för normalekvationerna $A^T A\bar{x} = A^T y$, där $\bar{x} = [k, \beta]^T$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 17 \end{bmatrix},$$

högerledet för normalekvationerna blir

$$A^T y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

Utifrån ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 5k + 9\beta &= 12 \\ 9k + 17\beta &= 22 \end{aligned}$$

får vi genom att subtrahera den första ekvationen från den andra att $4k + 8\beta = 10$, dvs $k = \frac{5-4\beta}{2}$. Insatt i den första ekvationen ger detta $5\left(\frac{5-4\beta}{2}\right) + 9\beta = 12$, dvs $\beta = \frac{1}{2}$, vilket ger $k = \frac{3}{2}$. Vi bestämmer $a = \beta/k = \frac{1}{3}$.

4. (13p) Betrakta följande ekvation

$$f(s) = \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\pi + sx)dx - s. \tag{1}$$

a) (5p) Ta ett steg med Newton-Raphsons metod applicerat på $f(s) = 0$, med startgissningen $s_0 = 0$. Vad blir s_1?

b) (8p) Antag nu att du vill applicera Newton-Raphsons metod med en startgissning $s_0 \neq 0$. Ersätt $f(s)$ med $\tilde{f}(s)$, där integralen har ersatts med en approximation med trapetsregeln med $h = \frac{\pi}{2}$ i $\tilde{f}(s)$, dvs $\tilde{f}(s) = T_{\frac{\pi}{2}}[\cos(\pi + sx)]_{\pi}^{2\pi} - s$, där $T_h[g(s)]_a^b$ approximerar integralen $\int_a^b g(s)dx$ med trapetsregeln och steglängd h. Formulera Newton-Raphsons metod för $\tilde{f}(s) = 0$ och beräkna s_1 givet att $s_0 = 1$.

Lösning:

a) Newton-Raphsons metod med s som obekant ges av

$$s_{i+1} = s_i - \frac{f(s_i)}{f'(s_i)}, \quad i = 0, 1 \cdots$$

För ett steg med $s_0 = 0$ behöver vi $f(s_0)$ och $f'(s_0)$:

$$f(s_0) = f(0) = \int_{\pi}^{2\pi} \cos(\pi + 0 \cdot x)dx - 0 = \cos(\pi) \int_{\pi}^{2\pi} 1dx = -1 \cdot (2\pi - \pi) = -\pi,$$

$$f'(s) = \int_{\pi}^{2\pi} -x\sin(\pi + s \cdot x)dx - 1, \quad \text{så att} \quad f'(s_0) = f'(0) = \int_{\pi}^{2\pi} -x\sin(\pi + 0 \cdot x)dx - 1 =$$

$$-x\sin(\pi) \int_{\pi}^{2\pi} dx - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Vi får att

$$s_1 = s_0 - \frac{f(s_0)}{f'(s_0)} = 0 - \frac{-\pi}{-1} = -\pi.$$

b) Vi ställer först upp $\tilde{f}(s)$ med trapetsregeln för integralen (1) med steglängd $h = \frac{\pi}{2}$:

$$\tilde{f}(s) = T_{\frac{\pi}{2}}[\cos(\pi + sx)]_{\pi}^{2\pi} - s = \frac{\pi}{4}\left[\cos(\pi + s\cdot\pi) + 2\cos\left(\pi + s\cdot\frac{3\pi}{2}\right) + \cos(\pi + s\cdot 2\pi)\right] - s.$$

Då har vi

$$\tilde{f}'(s) = \frac{\pi}{4}\left[-\pi\sin(\pi + s\cdot\pi) - 3\pi\sin\left(\pi + s\cdot\frac{3\pi}{2}\right) - 2\pi\sin(\pi + s\cdot 2\pi)\right] - 1.$$

Med $s_0 = 1$ får vi

$$\tilde{f}(s_0) = \tilde{f}(1) = \frac{\pi}{4}\left[\cos(2\pi) + 2\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + \cos(3\pi)\right] - 1 = \frac{\pi}{4}(1 + 2\cdot 0 - 1) - 1 = -1,$$

$$\tilde{f}'(s_0) = \tilde{f}'(1) = \frac{\pi}{4}\left[-\pi\sin(2\pi) - 3\pi\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) - 2\pi\sin(3\pi)\right] - 1 = \frac{\pi}{4}(0 - 3\pi - 0) - 1 = -\left(\frac{3\pi^2}{4} + 1\right),$$

och

$$s_1 = s_0 - \frac{\tilde{f}(s_0)}{\tilde{f}'(s_0)} = 1 - \frac{-1}{-\left(\frac{3\pi^2}{4} + 1\right)} = \frac{3\pi^2 + 4 - 4}{3\pi^2 + 4} = \frac{3\pi^2}{3\pi^2 + 4}.$$