KTH Matematik/Anna Nissen

Tentamen del 1
Numeriska beräkningar SF1522
2018-04-03, 14.00-17.00.

Namn: ....

Personnummer:.. **CDEPR, årskurs:** ....

Bonuspoäng. Ange dina bonuspoäng från kursomgången HT17 här:

Kontrollskrivning. Ange om du är godkänd på kontrollskrivning HT17 (ja/nej):

Max antal poäng är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng). Om du är godkänd på kontrollskrivningen HT17 så behöver du ej göra sista uppgiften, utan den räknas till full poäng. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på detta papper.

1. (2p) Fixpunktsiterationenen $x_{i+1} = g(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ med

$$g(x) = \frac{-x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 18}{18},$$

konvergerar lokalt mot roten $x^* = -1$ för $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 18x + 18$. Med vilken konvergenshastighet konvergerar metoden?

☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$ ☑ $\frac{2}{9}$

☐ 2 ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{1}{4}$

Lösning: Fixpunktsiterationen konvergerar linjärt enligt $|x_{i+1} - x^*| \approx S|x_i - x^*|$, med konvergenshastigheten $S = |g'(x^*)|$.
Derivera $g(x)$: $g'(x) = \frac{1}{18}(-4x^3 + 6x^2 + 6x)$. Vi får konvergenshastigheten $|g'(x^*)| = \frac{1}{18}(-4(-1)^3 + 6(-1)^2 + 6(-1)) = \frac{2}{9}$.

---

2. (2p) Integralen

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(x^2) dx$$

approximeras med en numerisk metod med fyra steglängder, $8h$, $4h$, $2h$, h. Den numeriska lösningen med steglängden $8h$ betecknas $I_{num}(8h)$. Skillnaderna mellan de numeriska lösningarna beräknas till

$$\begin{aligned}
|I_{num}(8h) - I_{num}(4h)| &= 0.00242, \\
|I_{num}(4h) - I_{num}(2h)| &= 0.000596, \\
|I_{num}(2h) - I_{num}(h)| &= 0.000148.
\end{aligned}$$

Vad är troligtvis metodens konvergensordning?

- ☐ 1
- ☑ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ Metoden konvergerar inte

Lösning: Skillnaderna mellan de numeriska lösningarna ger en approximation av metodens fel, e_h, för en viss steglängd h, där $e_{2h} \approx |I_{num}(2h) - I_{num}(h)|$, $e_{4h} \approx |I_{num}(4h) - I_{num}(2h)|$ osv. Vidare kan felet uttryckas som $e_h = Ch^p$, där p är metodens noggrannhetsordning.

Studera kvoterna $|I_{num}(8h) - I_{num}(4h)|/|I_{num}(4h) - I_{num}(2h)|$,
$|I_{num}(4h) - I_{num}(2h)|/|I_{num}(2h) - I_{num}(h)|$:

$|I_{num}(4h) - I_{num}(2h)|/|I_{num}(2h) - I_{num}(h)| \approx e_{2h}/e_h = 2^p$.

Med $p = 2$ får vi att

$$\begin{aligned}
|I_{num}(2h) - I_{num}(h)| \cdot 4 = 0.000148 \cdot 4 = 0.000592 &\approx |I_{num}(4h) - I_{num}(2h)|, \\
|I_{num}(4h) - I_{num}(2h)| \cdot 4 = 0.000596 \cdot 4 = 0.002384 &\approx |I_{num}(8h) - I_{num}(4h)|,
\end{aligned}$$

dvs metodens noggrannhetsordning är troligtvis $p = 2$.

---

3. (2p) Antag att det tar 1 s att lösa ekvationssystemet $Ax = b$, där systemmatrisen A är en full matris av storlek $N \times N$. Om problemstorleken ökas så att antal obekanta är $5N$, hur många sekunder tar det att lösa det större ekvationssystemet?

- ☐ 5
- ☐ 10
- ☐ 25
- ☐ 50
- ☐ 100
- ☑ 125

Lösning: Lösning av ett linjärt ekvationssystem med Gausseliminering har beräkningskomplexitet $\mathcal{O}(N^3) = CN^3$. Om antal obekanta istället är $5N$ får vi $C(5N)^3 = 125CN^3$ beräkningsoperationer. Den nya tidsåtgången blir 125 s.

---

4. (2p) Ett steg med Newton-Raphsons metod tillämpat på ekvationen $f(x) = 0$ där

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}\cos(\pi x),$$

och startgissningen är $x = 0$, ger att approximationen av nollstället är

☐ -2	☐ $1/2$	☐ 1	☐ $3/2$
☑ $-1/2$	☐ $2/3$	☐ $4/9$	☐ något annat

Lösning: Newton-Raphsons metod:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

med startgissning $x_0 = 0$ ger

$$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{e^0 - \frac{1}{2}\cos(0)}{e^0 + \frac{\pi}{2}\sin(0)} = -\frac{\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}.$$

---

5. (2p) Antag att du med hjälp av minstakvadrat-metoden vill anpassa ett andragradspolynom till tabelldata givna av

t	1	2	3	4
y	4	2	1	3

Normalekvationerna blir

☐ $\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 23 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 30 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 69 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 30 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 23 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 50 \\ 30 & 100 & 150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 23 \\ 69 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 256 \\ 100 & 256 & 530 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 23 \\ 69 \end{bmatrix}$

☑ $\begin{bmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 23 \\ 69 \end{bmatrix}$

där c_i, $i = 1, 2$ eller $i = 1, 2, 3$ är koefficienterna i polynomet.

Lösning: Det överbestämda ekvationssystemet för andragradspolynomet $p(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$ blir

$$\begin{bmatrix} t_1^0 & t_1^1 & t_1^2 \\ t_2^0 & t_2^1 & t_2^2 \\ t_3^0 & t_3^1 & t_3^2 \\ t_4^0 & t_4^1 & t_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix},$$

dvs

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Normalekvationerna ges av $A^T A\mathbf{c} = A^T\mathbf{b}$. Eftersom att $\mathbf{c}$ innehåller tre komponenter räcker det att kolla på alternativen i högra kolonnen. Alternativ ett utesluts då matrisen $A^T A$ är en symmetrisk matris. Alternativ 2 utesluts då element $(1, 1)$ i $A^T A$ blir $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4$. Då återstår enbart alternativ tre i högra kolonnen.

---

6. (2p) Trapetsregeln med $h = 2$ applicerat på integralen

$$\int_1^5 \frac{1}{1+x}\, dx$$

ger approximationen

☑ 7/6	☐ 5/4	☐ 6/5	☐ 16/15
☐ 67/60	☐ 4/3	☐ 12/5	☐ något annat

Lösning: Trapetsregeln applicerad på integral med integrand $f(x)$ över intervallet $[a, b]$, uppdelad i n delintervall:

$$T_h(f) = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) \cdots 2f(b-h) + f(b)\right],$$

där $h = \frac{b-a}{n}$. Med $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 1$, $b = 5$, $h = 2$ får vi

$$T_h(f) = \frac{2}{2}\left[f(1) + 2f(3) + f(5)\right] = \frac{1}{1+1} + \frac{2}{1+3} + \frac{1}{1+5} = \frac{7}{6}.$$

---

7. (2p) Följande två funktioner är givna:

```
function w = g(x)
w = 0.4 - x.*cos(x.^2);
end
```

och

```
function w = f(@g,x,h)
g1 = g(x+h);
g2 = g(x-h);
u = g1-g2;
v = u/h;
w = v/2;
end
```

När h går mot noll så skattar funktionen `f`

- ☐ Nollstället till funktionen g
- ☐ Integralen till funktionen g
- ☑ Förstaderivatan till funktionen g
- ☐ Andraderivatan till funktionen g
- ☐ Medelvärdet av funktionen g
- ☐ Maximum av funktionen g

Lösning: Funktionen `g.m` innehåller funktionen $g(x) = 0.4 - x\cos(x^2)$. Funktionen `f.m` beräknar

$$f(x) = \frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h},$$

för värden på x och h givna av indata. När h går mot 0 skattar $f(x)$ förstaderivatan till funktionen g.

---

8. (2p) En integral har beräknats med trapetsregeln och två olika steglängder, $T(h=1) = 0.5$, $T(h=0.5) = 0.3125$. Det extrapolerade värdet blir då

- ☑ 0.25
- ☐ 0.3125
- ☐ 0.40625
- ☐ 0.5
- ☐ 0.5125
- ☐ 0.5625
- ☐ 0.75
- ☐ 0.8125

Lösning: Richardsonextrapolation för Trapetsregeln ges av

$$\hat{T}_h = \frac{4T_h - T_{2h}}{3},$$

så att

$$\hat{T}(h=0.5) = \frac{4T(h=0.5) - T(h=1)}{3} = \frac{1.25 - 0.5}{3} = 0.25.$$

---

9. (2p) Vilka utsagor är sanna och vilka är falska?
(1-4 korrekta svar ger 0 p, 5-6 korrekta svar ger 2p.)

Namn: ....
Personnr:....................................

---

a) Fixpunktsiterationer konvergerar alltid snabbare än bisektionsmetoden.

☐ sant ☑ falskt

b) Simpsons regel har noggrannhetsordning 4.

☑ sant ☐ falskt

c) Minstakvadrat-metoden kan användas för att anpassa en exponentialfunktion till ett polynom.

☑ sant ☐ falskt

d) Sekantmetoden är en effektiv metod för att beräkna en rot till en skalär ekvation.

☑ sant ☐ falskt

e) Oscillationer som uppstår vid interpolation med polynom av högt gradtal kallas för Rombergs fenomen.

☐ sant ☑ falskt

f) Vid lösning av ett tringulärt linjärt ekvationssystem är tidsåtgången proportionell mot antalet obekanta.

☐ sant ☑ falskt

Lösning:

a) Falskt. Båda metoderna konvergerar linjärt, bisektionsmetoden med konvergenshastighet $\frac{1}{2}$. För en fixpunktsiteration med $x = g(x)$ beter sig konvergenshastigheten som $g'(x^*)$ (nära roten x^*) och kan alltså konvergera snabbare eller långsammare än bisektionsmetoden.

b) Sant.

c) Sant, genom att sampla värden av exponentialfunktionen och anpassa dessa.

d) Sant, till en skalär icke-linjär ekvation.

e) Falskt. Oscillationerna kallad för Runges fenomen.

f) Falskt. Tidsåtgången är proportionell mot antalet obekanta i kubik.

---

10. (2p) (Denna uppgift behöver du ej göra om du klarat kontrollskrivningen i MATLAB.)

a) (1p) Följande MATLAB-kod finns:

Namn: ....
Personnr:...................................

```
A = [1 1 1; 2 2 2; 3 3 3];
x = [1; 2; 3];
Ax = A*x;
val = sum(Ax)/length(Ax);
```

Efter att koden körts, vilket värde kommer att vara lagrat i variabeln `val`?

- [ ] 4
- [ ] 8
- [x] 12
- [ ] 16
- [ ] 6
- [ ] 10
- [ ] 14
- [ ] 18

b) (1p) Följande MATLAB-kod finns:

```
val = 1;
while val < 10
    if val < 5
        val = 2*val;
    elseif val >= 5
        val = val + 2;
    end
end
```

Efter att koden körts, vilket värde kommer att vara lagrat i variabeln `val`?

- [ ] 8
- [ ] 12
- [ ] 16
- [x] 10
- [ ] 14
- [ ] 18

Lösning:

a) Matrismultiplikationen ger vektorn $Ax = [6, 12, 18]^T$. `sum(Ax)` beräknar summan av elemneten i Ax och `length(Ax)` returenerar antal elemnet i Ax. Variablen `val` kommer att lagra talet $\frac{36}{3} = 12$.

b) Initialt: `val=1`.
Varv 1: `val<10, val<5`: `val=2*val = 2`.
Varv 2: `val<10, val<5`: `val=2*val = 4`.
Varv 3: `val<10, val<5`: `val=2*val = 8`.
Varv 4: `val<10, val>=5`: `val=val+2 = 10`.
Då `val<10` ej längre gäller avslutas slingan med `val = 10`.
