KTH Matematik/Anna Nissen

Tentamen del 2
Numeriska beräkningar SF1522
2018-04-03, 14.00-17.00.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar för att undvika poängavdrag.
Del 2 rättas om del 1 är godkänd. Max antal poäng är 40.
Betygsgränser: D 8, C 16, B 24 och A 32 poäng.

1. (14p) Temperaturen i Haparanda har uppmätts varje hel timme den 13 mars 2018. Temperataturer uppmätta mellan klockan 12 och 22 finns i tabell 1.

t [klockslag]	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
T [°C]	-2.1	-2.3	-2.5	-3.0	-3.6	-4.1	-4.3	-4.3	-4.4	-4.5	-4.9

Tabell 1: Klockslag t och uppmätta temperaturer T.

a)(2p) Om alla tabelldata används för att interpolera ett polynom, vilket gradtal får polynomet? Ange minst en nackdel med att använda alla data för interpolation.

b) (4p) Bestäm ett andragradpolynom med interpolation genom att använda lämpligt antal värden i slutet av tabellen. Använd polynomet för att uppskatta temperaturen vid tiden 20:20.

c) (4p) Skriv en Matlab-kod som interpolerar ett fjärdegradpolynom till de första mätvärdena i tabellen. Koden ska plotta polynomet med avseende på tiden som en kontinuerlig kurva. Koden ska även plotta de tabellvärden du använt, markera dessa med 'o'.

d) (4p) Utöka programmet du gjort i c) så att programmet utifrån det framtagna fjärdegradspolynomet beräknar vid vilken tid temperaturen är -2.7.
Om du inte gjort uppgift c) kan du anta att koefficienterna till polynomet finns lagrat i vektorn `p`.

Lösning:

a) Om alla 11 mätvärden används får polynomet gradtal 10. En anledning att inte använda alla data vid interpolation är att Runges fenomen uppstår nära ändpunkterna för hög polynomgrad. En annan anledning är att om en misstänker mätfel kan det vara en god idé att inte tvinga polynomet igenom uppmätta värden.

b) Använd de tre sista mätvärdena och Newtons ansats:

$$p(t) = c_1 + c_2(t-20) + c_3(t-20)(t-21).$$

$$p(20) = c_1 = -4,4.$$
$$p(21) = -4,4 + c_2(21-20) = -4,5 \leftrightarrow c_2 = -0,1.$$
$$p(22) = -4,4 - 0,1(21-20) + c_3(22-20)(22-21) = -4,9 \leftrightarrow c_3 = -0,15.$$

Vi får

$$p(t) = -4,4 - 0,1(t-20) - 0,15(t-20)(t-21),$$

och temperaturen vid klockan 20:20 blir

$$p\left(20+\frac{1}{3}\right) = -4,4 - 0,1\left(\frac{1}{3}\right) - 0,15\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -4,4.$$

c) Förslag på Matlab-kod:

```
t = [12:16];
T = [-2.1 -2.3 -2.5 -3.0 -3.6];
p = polyfit(t,T,4);
tvec = linspace(12,16,1001);
pvec = polyval(tvec,Tvec);
figure
plot(tvec,Tvec)
hold on
plot(t,T,'o')
```

d) Förslag på Matlab-kod 1:

```
% söker värde på t där p(t) = -2.7.
% formulera om problemet så att vi söker t* för vilken p(t*) + 2.7 = 0
p(end) = p(end) + 2.7;
tval = roots(p);
% tval ger fyra lösningar, se vilken som ligger i korrekt intervall
```

Förslag på Matlab-kod 2:

```
% söker värde på t där p(t) = -2.7.
% formulera om problemet så att vi söker t* för vilken p(t*) + 2.7 = 0
p(end) = p(end) + 2.7;
pol = @(x) p(1)*x.^4 + p(2)*x.^3 + p(3)*x.^2 + p(4)*x + p(5);
tval = fzero(pol,15);
```

---

2. (10p) Betrakta integralen

$$I = \int_1^5 \frac{1}{1+x}dx,$$

som har det exakta värdet $I = \ln(6) - \ln(2)$.

a)(4p) Antag att du har två numeriska approximationer av I, I_h och I_{2h}, beräknade med en viss metod och steglängderna h och $2h$. Härled en formel för att beräkna noggrannhetsordningen för metoden givet I, I_h och I_{2h}.

b)(6p) Antag att du har tillgång till en funktion `integration` som approximerar en integral med en numerisk metod. Du vill nu undersöka hur bra funktionen `integration` är.

Indata till funktionen är ett funktionshandtag (motsvarande integranden), intervallet för integralen och antalet delintervall. Utdata är det approximativa värdet av integralen.

Ett funktionsanrop för den givna integralen med 10 delintervall kan se ut så här:

`I = integration(func,[1 5],10);`

där

`func = @(x) 1./(1+x);`

Skriv en Matlab-kod som gör en konvergensstudie för metoden i funktionen `integration`, där du applicerar metoden på den givna integralen. Koden ska beräkna minst två numeriska värden av noggrannhetsordningen och skriva ut dem.

Du kan i koden använda Matlab-raderna ovan och det givna exakta värdet på I.

Lösning:

a) Antag att noggrannhetsordningen är p. Då gäller att

$$I_h = I + ch^p + \mathcal{O}(h^{p+1}),$$
$$I_{2h} = I + c(2h)^p + \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Bilda kvoten

$$q = \frac{I_{2h} - I}{I_h - I} = \frac{c(2h)^p}{ch^p} = 2^p. \tag{1}$$

Noggrannhetsordningen blir $p = \log_2(q) = \log_2\left(\frac{I_{2h}-I}{I_h-I}\right)$.

b) Förslag på Matlab-kod 2:

```
func = @(x) 1./(1+x);
a = 1;
b = 2;
n = 10;
I = log(6) - log(2);
Ihvec = [];

for k = 1:3
Ih = integration(func,[a b],n);
Ihvec = [Ihvec Ih];
n = 2*n;
end
% bilda kvoter av felen - q nedan blir en vektor
q = (Ihvec(1:end-1)-I)./(Ihvec(2:end)-I);
p = log2(q);
disp(['Noggrannhetsordningen blir ', num2str(p)]);
```

---

3. (5p) Du vill numeriskt lösa ett linjärt ekvationssystem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Matrisen A är given som

$$A = \begin{bmatrix} 35 & 17 & 49 \\ 10 & 53 & 48 \\ 98 & 10 & 29 \end{bmatrix},$$

och A^{-1} beräknas i Matlab till

```
>> Ainv = inv(A)

Ainv =

   -0.0077    0.0000    0.0129
   -0.0321    0.0275    0.0086
    0.0370   -0.0096   -0.0122
```

Antag att storleken på elementen i $\mathbf{b}$ ligger mellan 3 och 5 och att de anges med två decimaler.

Efter att ekvationssystemet har lösts i Matlab enligt

```
>> x = A\b;
```

kommer storleken på elementen i variabeln $\mathbf{x}$ att ligga mellan 0.01 och 0.05. Elementen i $\mathbf{x}$ kommer att innehålla många decimaler. Hur många decimaler i $\mathbf{x}$ kan med säkerhet anges som korrekta och vad är den övre gränsen för det relativa felet i $\mathbf{x}$?

Lösning: Det relativa felet i $\mathbf{x}$ begränsas av

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}, \tag{2}$$

där konditionstalet för matrisen A ges av $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$.

Använd max-norm. Matrisnormerna i max-norm blir

$$\|A\|_\infty = |98| + |10| + |29| = 137,$$
$$\|A^{-1}\|_\infty = |-0.0321| + |0.0275| + |0.0086| \approx 0.07.$$

och $\kappa(A) \approx 137 \cdot 0.07 \approx 10$. Med två korrekta decimaler är $\|\Delta\mathbf{b}\|_\infty = 0.5 \cdot 10^{-2}$ och $\|\Delta\mathbf{b}\|_\infty/\|\mathbf{b}\|_\infty \approx 0.5 \cdot 10^{-2}/5 = 10^{-3}$. Den övre begränsningen på relativa felet i $\mathbf{x}$ blir

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq 10 \cdot 10^{-3} = 10^{-2}.$$

Det absoluta felet i $\mathbf{x}$ är begränsat av $\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \cdot 10^{-2} = 0.05 \cdot 10^{-2} = 0.5 \cdot 10^{-3}$. Tre decimaler kan därmed anges som korrekta.

---

4. (11p) Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= 9, \\ x + \cos(y) &= 2. \end{aligned}$$

a)(2p) Hur många lösningar har systemet?

b) (4p) Skriv om ekvationssystemet till en skalär ekvation så att lösningen kan bestämmas med Newton-Raphsons metod. Formulera Newton-Raphsons metod för att bestämma en lösning.

c) (5p) Systemet har en lösning nära y=1.5. Skriv ett Matlab-program som bestämmer den lösningen med Newton-Raphsons metod och minst 8 decimaler.

Lösning:

a) Systemet har två lösningar. Den första ekvationen beskriver en ellips med $x \in [-3, 3]$, $y \in \left[-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$. Kurvan $x = 2 - \cos(y)$ antar x-värden mellan 1 och 3 med $x(0) = 1$ (inuti ellipsen), och skär ellipsen symmetriskt vid $\pm y_1$, där $y_1 \in [0, \pi]$.

b) Lös ut x som funktion av y: $x = 2 - \cos(y)$. Sätt in i den första ekvationen, detta ger

$$(2 - \cos(y))^2 + 2y^2 = 9.$$

Med

$$\begin{aligned} f(y) &= (2 - \cos(y))^2 + 2y^2 - 9, \\ f'(y)(2 - \cos(y)) &\cdot \sin(y) + 4y, \end{aligned}$$

och startgissning y_0 formuleras Newton-Raphsons metod som

$$y_{k+1} = y_k - \frac{f(y_k)}{f'(y_k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

c) Förslag på Matlab-kod:

```
y = 1.5;
tol = 0.5e-8;
fel = 1;
f = @(y) (2-cos(y))^2 + 2*y^2 - 9;
fp = @(y) (2-cos(y))*sin(y) + 4*y;
while abs(fel) > tol
ynew = y - f(y)/fp(y);
fel = ynew-y;
y = ynew;
end
```