KTH Matematik/Anna Nissen

Tentamen del 1
Numeriska beräkningar SF1522
2018-01-11, 9.00-12.00.

Namn: ....

Personnummer:.. **CDEPR, årskurs:** ....

Bonuspoäng. Ange dina bonuspoäng från kursomgången HT17 här:

Kontrollskrivning. Ange om du är godkänd på kontrollskrivning (ja/nej):

Max antal poäng är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng). Om du är godkänd på kontrollskrivningen så behöver du ej göra sista uppgiften, utan den räknas till full poäng. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på detta papper.

1. (2p) Fixpunktsiterationerna $x_{i+1} = g(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ med

$$g(x) = \frac{-x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 18}{12} \tag{A}$$

$$g(x) = \frac{-x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 8x - 18}{20} \tag{B}$$

$$g(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + 18}{9x - 12} \tag{C}$$

konvergerar lokalt mot roten $x^* = -1$ för $f(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 12x + 18$. Rangordna dem i hastighetsordning, med den som konvergerar snabbast först.

☐ (A),(B),(C) ☐ (B),(A),(C) ☐ (C),(A),(B)

☐ (A),(C),(B) ☑ (B),(C),(A) ☐ (C),(B),(A)

Lösning: Fixpunktsiterationen $x_{i+1} = g(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ konvergerar lokalt mot roten x^* om $|g(x^*)| < 1$. Konvergenshastigheten ges av $S = |g(x^*)|$, där felet för varje iteration förändras enligt $e_{i+1} = Se_i$. Ett mindre värde på S leder alltså till snabbare konvergens.

Namn: ....
Personnr:...................................

Vi ser på derivatorna av de olika funktionerna $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{-4x^3 + 6x^2 + 18x}{12} \quad \text{(A)}$$
$$g'(x) = \frac{-4x^3 + 6x^2 + 18x + 8}{20} \quad \text{(B)}$$
$$g'(x) = \frac{(9x-12)(4x^3 - 6x^2) - 9(x^4 - 2x^3 + 18)}{(9x-12)^2} \quad \text{(C)}$$

Insättning av roten $x^* = -1$ ger

$$g'(-1) = \frac{-4(-1)^3 + 6(-1)^2 + 18(-1)}{12} = -\frac{2}{3} \quad \text{(A)}$$
$$g'(-1) = \frac{-4(-1)^3 + 6(-1)^2 + 18(-1) + 8}{20} = 0 \quad \text{(B)}$$
$$g'(-1) = \frac{(9(-1)-12)(4(-1)^3 - 6(-1)^2) - 9((-1)^4 - 2(-1)^3 + 18)}{(9(-1)-12)^2} = \frac{1}{21} \quad \text{(C)}$$

Fixpunktsiterationerna konvergerar från snabbast till långsammast i ordning (B),(C),(A).

2. (2p) Du vill lösa ekvationssystemen $Ax = b_1$, $Ax = b_2$, ..., $Ax = b_{100}$, där systemmatrisen A är en 100×100-matris. Gausseliminering för ett ekvationssystem tar 2 s. Hur lång tid (i s) tar lösning av alla ekvationssystemen om du utnyttjar LU-faktorisering?

☐ 4 ☐ 6 ☑ 8

☐ 5 ☐ 7 ☐ 9

Lösning: Gausseliminering kräver ca $\frac{2n^3}{3}$ aritmetiska operationer för ett system med n obekanta. Med $n = 100$ tar Gausseliminering för ett system 2 s. Tidsåtgången för varje aritmetisk operation (op.), T, blir då ungefär

$$T = \frac{2}{\frac{2}{3} \cdot 10^6} \frac{s}{op.} = 3 \cdot 10^{-6} \;\; s/op.$$

Vid LU-faktorisering görs först en Gausseliminering, vilket tar 2 s. Sedan löses ett undertriangulärt och ett övertriangulärt system för varje ekvationsystem, till kostnad n^2 operationer var. Tidsåtgången (i s) för 100 sådana system blir totalt

$$2 + 2 \cdot 100 \cdot n^2 \cdot T,$$

och med $n = 100$, $T = 3 \cdot 10^{-6}$ insatt får vi

$$2 + 2 \cdot 100 \cdot 100^2 \cdot 3 \cdot 10^{-6} = 2 + 6 = 8.$$

3. (2p) Om $y'(x)$ approximeras med

$$\frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h},$$

hur minskar felet när steglängden h halveras?

- ☐ Felet minskar med en faktor 2.
- ☑ Felet minskar med en faktor 4.
- ☐ Felet minskar med en faktor 6.
- ☐ Felet minskar med en faktor 8.
- ☐ Felet minskar med en faktor 10.
- ☐ Felet minskar med en faktor 16.
- ☐ Felet minskar inte.

Lösning: Identifiera att approximationen är andra ordningens noggrann, alternativt Taylorutveckla:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + h^2y''(x) + h^3y'''(c_1), \;\; x < c_1 < x+h,$$
$$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + h^2y''(x) - h^3y'''(c_2), \;\; x < c_2 < x+h,$$

vilket ger

$$\frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} = y'(x) + \underbrace{\frac{h^2}{2}(y'''(c_1) - y'''(c_2))}_{e_h = \mathcal{O}(h^2) \approx Ch^2}.$$

När h halveras påverkas felet e_h som

$$e_{h/2} = C\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{Ch^2}{4} = \frac{e_h}{4},$$

dvs felet minskar med en faktor 4.

4. (2p) Ett steg med Newton-Raphsons metod tillämpat på ekvationen $f(x) = 0$ där

$$f(x) = \cos(2\pi x) + 3x^3,$$

och startgissningen är $x = 1$, ger att approximationen av nollstället är

☐ -2	☐ $4/9$	☐ $2/3$	☐ $3/2$
☐ $-3/2$	☑ $5/9$	☐ $8/9$	☐ något annat

Lösning: Newton Raphsons metod: Givet startgissning x_0 har vi

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots$$

Derivatan av $f(x) = \cos(2\pi x) + 3x^3$: $f'(x) = -2\pi \sin(2\pi x) + 9x^2$. Första iterationen blir med $x_0 = 1$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{\cos(2\pi(1)) + 3(1)^3}{-2\pi \sin(2\pi(1)) + 9(1)^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Namn: ....
Personnr:....................................

5. (2p) Trapetsregeln med $h = 2$ applicerat på integralen

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

ger approximationen

- [ ] 7/10
- [ ] 24/15
- [ ] 24/5
- [ ] 15/16
- [ ] 7/5
- [ ] 14/5
- [x] 12/5
- [ ] något annat

Lösning: Trapetsregeln med $h = 2$, vi får två delintervall. Låt $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Vi får

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f(-2) + 2f(0) + f(2)\right) =$$

$$= \frac{2}{2}\left(\frac{1}{1+(-2)^2} + 2\frac{1}{1+0^2} + \frac{1}{1+(2)^2}\right) = \left(\frac{1}{5} + 2 + \frac{1}{5}\right) = \frac{12}{5}.$$

6. (2p) Minstakvadratanpassningen $y(t) = 3t + 2$ till

t	1	3	4	6
y	6	10	13	21

ger att minstakvadrat-felet, dvs 2-normen av residualvektorn, blir

- [ ] 1
- [ ] $\sqrt{3}$
- [ ] $\sqrt{6}$
- [ ] 3
- [ ] $\sqrt{2}$
- [x] 2
- [ ] $\sqrt{8}$
- [ ] 4

Lösning: Ställ upp det överbestämda ekvationssystemet som uppfyller

$$y_i = 3t_i + 2, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Detta ger $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 13 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Residualvektorn $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$ blir

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 13 \\ 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 13 \\ 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 14 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Minstakvadratfelet blir

$$\|\mathbf{r}\|_2 = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = 2.$$

Namn: ....
Personnr:...................................

7. (2p) Antag att du vill interpolera ett polynom till samtliga mätdata

x	1	4	7	9	11
y	2	6	4	8	9

a) (1p) Polynomet som ansätts ska vara av gradtal

- [ ] 1
- [ ] 3
- [ ] 5
- [ ] 2
- [x] 4
- [ ] 6

b) (1p) Ekvationssystemet som fås har en koefficientmatris av storlek

- [ ] 4×3
- [ ] 3×4
- [ ] 5×4
- [ ] 6×5
- [ ] 4×4
- [ ] 4×5
- [x] 5×5
- [ ] 5×6

Lösning: a) Polynomet som ansätts ska vara en grad längre än antal datapunkter, dvs med 5 datapunkter får vi ett polynom av grad 4.
b) Vi får ett ekvationssystem $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$. Polynomet av grad 4 kommer ha 5 obekanta konstanter att bestämma (inklusive konstanttermen i polynomet), vilket leder till 5 obekanta i vektorn **c** (och 5 kolonner i A.). Högerledet **b** innehåller de 5 mätvärdena för y, dvs både **b** och A har 5 rader. Koefficientmatrisen A blir därför en kvadratisk matris av storlek 5×5.

8. (2p) Betrakta ekvationssystemen $Ax = b$ och $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, där $x, \Delta x, b, \Delta b \in \mathbb{R}^2$.
Antag att $A = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 100 & 0 \end{bmatrix}$, då blir $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{100} \\ \frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix}$.
Om den maximala relativa störningen $\|\Delta b\|_\infty/\|b\|_\infty$ är 10^{-9}, vilket är det största värde det relativa felet $\|\Delta x\|_\infty/\|x\|_\infty$ kan anta?

- [ ] 10^{-11}
- [x] 10^{-8}
- [ ] 10^{-5}
- [ ] 10^{-10}
- [ ] 10^{-7}
- [ ] 10^{-4}
- [ ] 10^{-9}
- [ ] 10^{-6}
- [ ] 10^{-3}

Lösning: Det relativa felet $\|\Delta x\|_\infty/\|x\|_\infty$ är begränsat enligt

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq cond(A)_\infty \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty},$$

där konditionstalet för matrisen A är $cond(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$. Maxnormen av matrisen A och dess invers A^{-1} ges av maximala radsumman av $|A|$:

$$\|A\|_\infty = 100, \qquad \|A^{-1}\|_\infty = \frac{1}{10}.$$

Med $\|\Delta b\|_\infty / \|b\|_\infty = 10^{-9}$ får vi

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le 100 \cdot \frac{1}{10} \cdot 10^{-9} = 10^{-8}.$$

9. (2p) Följande MATLAB-kod är en implementering av en numerisk metod, vilken?

```
m=8;
v=ones(1,m);
v(1)=v(1)/2;
v(m)=v(m)/2;
v=v*0.2;
f=0;
for i=1:m;
  f(i)=cos(0.2*(i-1));
end;
svar=v*f(:)
```

- [ ] Newtons metod
- [x] Trapetsregeln
- [ ] Simpsons regel
- [ ] Fixpunktsiteration
- [ ] Linjär interpolation
- [ ] Kvadratisk interpolation
- [ ] Kubisk interpolation
- [ ] Minstakvadrat-metoden

Lösning: Vektorn `v` skapas först med åtta element och innehåller ettor, förutom de första och sista elementen som är en halv. Sedan skalas `v` med 0.2. På den sista raden multipliceras `v` (som är en radvektor) med `f(:)` som är en kolonnvektor (även om `f` skulle vara en radvektor), detta blir en skalärprodukt och variabeln `svar` kommer därför innehålla ett skalärt värde. Med steglängden $h = 0.2$ blir `v` en vektor med integrationsvikter, vi får $\mathtt{v} = \frac{\mathtt{h}}{2}[1, 2, 2, \ldots, 2, 1]$. `svar` kommer att vara en approximation med trapetsregeln, givet att `f` är en vektor som innehåller värden av integranden, eftersom att $\mathtt{v}*\mathtt{f}(:) = \frac{\mathtt{h}}{2}*(\mathtt{f(1)}+2*\mathtt{f(2)}+2*\mathtt{f(3)}+\cdots 2*\mathtt{f(7)}+\mathtt{f(8)})$. I for-slingan tilldelas `f` värden motsvarande $\cos(0), \cos(0.2), \cos(0.4), \ldots, \cos(1.4)$ och integralen som approximeras är alltså

$$\int_0^{1.4} \cos(x) dx.$$

10. (2p) (Denna uppgift behöver du ej göra om du klarat kontrollskrivningen i Matlab.)
Vi vill beräkna en sekvens med Fibonaccital, definierat enligt

$$\begin{aligned} F_1 &= 1, \\ F_2 &= 1, \\ F_{i+1} &= F_i + F_{i-1}, \qquad i = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

och lagra talen i en vektor `f`.
Följande rader Matlabkod är givna:

```
f = [1 1];
N = 8;
(1)  f = fny;
(2)  f = sum(f);
(3)  f = [f fny];
(4)  for k=2:N
(5)  for k=2:N-1
(6)  fny = f(k) + f(k-1);
(7)  fny = f(k+1) + f(k);
(8)  end;
```

a) (1.5p) Från raderna (1)-(8), välj ut de rader som behövs och ordna dem så att vektorn `f` innehåller sekvensen $F_1, F_2, \ldots, F_8$.

Radordning:

- [x] (5),(6),(3),(8)
- [ ] (2),(4),(6),(3),(8)
- [ ] (4),(6),(3),(8)
- [ ] (4),(6),(1),(2),(3),(8)
- [ ] (5),(7),(2),(8)
- [ ] (5),(7),(1),(3),(8)
- [ ] (4),(7),(2),(8)
- [ ] Inget av alternativen fungerar.

b) (0.5p) Givet att sekvensen $F_1, F_2, \ldots, F_8$ har lagrats i vektorn `f`, hur kan du beräkna F_6 från relationen $F_6 = F_8 - F_7$? (Uppgiften kan lösas oberoende av uppgift a).)

- [x] `f6 = f(end)-f(end-1);`
- [ ] `d = diff(f); f6 = d(end-1);`
- [ ] `d = f(2:end-1)-f(1:end-2); f6 = d(end);`
- [ ] `d = f(2:end)-f(1:end); f6 = d(end);`

Lösning: a) Vi vill lagra de 8 första Fibonaccitalen i vektorn `f`. Vi behöver en for-slinga, sedan behöver vi definiera nästa Fibonaccital och lagra det längst bak i vektorn. Båda for-slingorna startar på $\texttt{k} = 2$. Eftersom att `f` initialt innehåller två komponenter kan vi inte ta ut $\texttt{f}(\texttt{k}+1)$ innan vektorn `f` har utvidgats. Därför används rad (6) för att definiera nästa Fibonaccital och rad (3) för att lagra det längst bak i vektorn. För att de 8 första Fibonaccitalen ska lagras måste for-loopen gå till 7, dvs $\texttt{N} - 1$, då beräknas F_8 och lagras i sista varvet i slingan. Den första raden är således (5). Avslutningsvis ska slingan avslutas med `end`, rad (8). Den korrekta radordningen blir (5),(6),(3),(8).

b) Det första alternativet är det enda som fungerar samt är korrekt. I det andra alternativet tas skillnaden mellan konsekutiva element i `f` ut och lagras i `d`, `d(end-1)` blir dock $F_7 - F_6$. I det tredje alternativet beräknas konsekutiva skillnader upp till $F_7 - F_6$ och lagras i `d`, slutresultatet blir samma som i alternativ två. Alternativ fyra fungerar inte då `f(2:end)` och `f(1:end)` inte har lika många element.