KTH Engineering Sciences

Tentamen 2020-08-14
Del 1

SF1547 – Numeriska metoder

Max antal poäng på denna del är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 11 poäng. Endast ett korrekt svar per uppgift. Om denna del av tentamen (Del 1) blir godkänd så rättas även Del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Skriv alla svar på denna del på ett och samma papper.

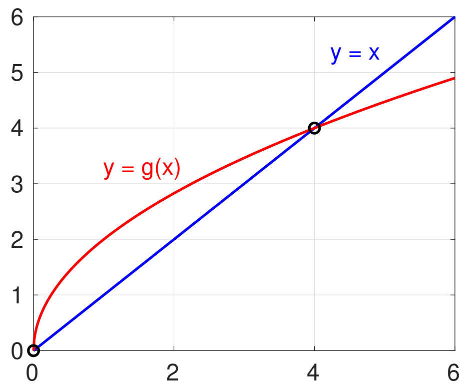
Skriv bara uppgiftsnummer och ditt valda svarsalternativ (A,B,C, ...), inga uträkningar.

Skriv "Del 1" överst på pappret samt ditt namn och personnummer.

(2 p)

1. Kurvorna $y = x$ och $y = g(x)$ skär varandra när $x = 0$ och $x = 4$. Se figur. Vilket eller vilka av nedanstående påståenden om fixpunktiterationen $x_{k+1} = g(x_k)$ är sant/sanna?

1. Om $x_0 = 2$ konvergerar x_k mot 4.
2. Om $x_0 = 1$ konvergerar x_k mot 0.
3. Om $x_0 = 6$ konvergerar x_k mot 4.



A. 1 och 2 men inte 3 **B.** 2 och 3 men inte 1 **C.** 1 och 3 men inte 2
D. 1, 2 och 3 **E.** Bara 1 **F.** Bara 3

Lösning: C. (50% av tentanderna hade rätt svar.)
Från figuren framgår att $g'(0)$ är större än derivatan av $y(x) = x$, dvs 1. Därmed kan fixpunktiterationen inte konvergera mot $x = 0$. Från figuren ser man vidare att $0 \le g'(x) < 1$ för $x \in [2, 6]$, varför fixpunktiterationen konvergerar mot fixpunkten $x = 4$ för alla startvärden i det intervallet.

---

2. Ett objekts hastighet som funktion av tiden ges av tabellen (2 p)

tid (s)	3	5	7	9	11
hastighet (m/s)	12	16	24	15	33

Använd trapetsregeln för att beräkna hur långt objektet rört sig (i meter) mellan $t = 3$ och $t = 11$ sekunder. Resultatet blir:

A. 77.5 **B.** 100.0 **C.** 155.0 **D.** 193.0 **E.** 200.0 **F.** 232.5

Lösning: C. (93% av tentanderna hade rätt svar.)
Avståndet är tidsintegralen av hastigeten. Trapetsregeln ger därför

$$h\left(\frac{12}{2} + 16 + 24 + 15 + \frac{33}{2}\right) = 2 \cdot 77.5 = 155,$$

eftersom $h = 2$.

---

3. Givet följande noggranna mätvärden av temperaturen T i en ugn som funktion av tiden t under uppvärmning, (2 p)

t (min)	0	14	15	20	30	35
T (C)	20	127	263	317	403	502

För att bestämma ugnens temperatur vid $t = 25$ min väljer man att använda ett andragradspolynom $T(t) = a+bt+ct^2$ för att approximera temperaturprofilen. Vilket av följande linjära system är lämpligast för att beräkna koefficienterna a, b, c?

A. $\begin{bmatrix} 1 & 14 & 196 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 20 & 400 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 127 \\ 263 \\ 317 \end{bmatrix}$ **B.** $\begin{bmatrix} 1 & 15 & 225 \\ 1 & 20 & 400 \\ 1 & 30 & 900 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 263 \\ 317 \\ 403 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & 225 \\ 1 & 30 & 900 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 263 \\ 403 \end{bmatrix}$ **D.** $\begin{bmatrix} 1 & 14 & 196 \\ 1 & 20 & 400 \\ 1 & 35 & 1225 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 127 \\ 317 \\ 502 \end{bmatrix}$

E. $\begin{bmatrix} 1 & 15 & 20 \\ 1 & 20 & 30 \\ 1 & 30 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 263 \\ 317 \\ 403 \end{bmatrix}$ **F.** $\begin{bmatrix} 1 & 15 & 225 \\ 1 & 20 & 400 \\ 1 & 30 & 900 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$

Lösning: B. (77% av tentanderna hade rätt svar.)
Interpolation i punkterna närmast den sökta tidpunkten ger högst noggrannhet och är därför lämpligast. Vi väljer alltså $(t_0, T_0) = (15, 263)$, $(t_1, T_1) = (20, 317)$ och $(t_2, T_2) = (30, 403)$. Vandermondesystemet blir

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 \\ 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 15 & 225 \\ 1 & 20 & 400 \\ 1 & 30 & 900 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 263 \\ 317 \\ 403 \end{bmatrix}.$$

4. Det irrationella talet e kan approximeras genom att använda Newtons metod för att lösa den olinjära ekvationen $f(x) = \ln x - 1 = 0$. Vad blir Newtons iterationsformel i detta fall? (1 p)

A. $x_{k+1} = \ln x_k$ **B.** $x_{k+1} = x_k - \ln x_k$ **C.** $x_{k+1} = x_k - (\ln x_k - 1)$
D. $x_{k+1} = 2x_k - x_k \ln x_k$ **E.** $x_{k+1} = x_k - \frac{\ln x_k - 1}{x_k - 1}$ **F.** $x_{k+1} = x_k - \frac{1}{x_k(\ln x_k - 1)}$

Lösning: D. (77% av tentanderna hade rätt svar.)
Newtons metod lyder $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$. Med $f(x) = \ln x - 1$ får vi

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\ln x_k - 1}{1/x_k} = 2x_k - x_k \ln x_k.$$

---

5. I tabellen nedan visas absolutfelet för tre olika differensapproximationer (betecknade I, II och III) av derivatan $f'(x)$. Felen är beräknade med olika steglängder h. (2 p)

h	Approximation I	Approximation II	Approximation III
0.500000	5.764e-01	6.670e-02	9.329e-03
0.250000	3.096e-01	1.683e-02	3.565e-04
0.125000	1.596e-01	4.218e-03	5.181e-05
0.062500	8.093e-02	1.055e-03	4.116e-06
0.031250	4.074e-02	2.638e-04	2.836e-07
0.015625	2.044e-02	6.595e-05	1.853e-08
0.007812	1.024e-02	1.649e-05	1.183e-09
0.003906	5.122e-03	4.122e-06	7.513e-11

Vilket av följande påståenden stämmer?

A. I och II har noggrannhetsordning 1, III har noggrannhetsordning 2
B. I och II har noggrannhetsordning 2, III har noggrannhetsordning 4
C. I har noggrannhetsordning 1, II och III har noggrannhetsordning 2
D. I har noggrannhetsordning 1, II har noggrannhetsordning 2, III har noggrannhetsordning 3
E. I har noggrannhetsordning 1, II har noggrannhetsordning 2, III har noggrannhetsordning 4
F. Alla tre approximationerna har samma noggrannhetsordning (men olika felkonstanter)

Lösning: E. (67% av tentanderna hade rätt svar.)
Eftersom felen i nedre delen av tabellen avtar med faktorerna 2, 4 och 16 för respektive approximation I, II och III.

---

6. Antag att din dator kan lösa 100 linjära ekvationssystem $Ax = b$ på 1 sekund, när A är en 500×500 full matris. Ungefär hur lång tid skulle det då ta att lösa *ett* linjärt ekvationssystem när A är en 5000×5000 full matris? (2 p)

A. 1 sekund **B.** 10 sekunder **C.** 30 sekunder
D. 1 minut **E.** 5 minuter **F.** 10 minuter

Lösning: B. (77% av tentanderna hade rätt svar.)
Beräkningstiden är proportionell mot antalet obekanta i kubik. Vi får därför för tidsåtgångarna T_1 och T_2 i de två fallen

$$T_1 \approx 100 \cdot C500^3, \qquad T_2 \approx C5000^3 = 1000 \cdot C500^3 \approx 10T_1 = 10 \text{ sekunder}.$$

---

7. Detta system av första ordningens ordinära differentialekvationer (2 p)

$$
\begin{aligned}
u' &= v, \\
v' &= w, \\
w' &= \eta v - \sin(u) + f(t),
\end{aligned}
$$

är ekvivalent med vilken av följande högre ordnings differentialekvationer:

A. $y'' - \eta y' + \sin(y) = f(t)$ **B.** $y'' - \eta y + \sin(y) = f(t)$
C. $y''' - \eta y' + \sin(y) = f(t)$ **D.** $y'''' - \eta y' + \sin(y) = f(t)$
E. $y''' - \eta y + \sin(y) = f(t)$ **F.** $y''' + \eta y' + \sin(y) = f(t)$

Lösning: C. (80% av tentanderna hade rätt svar.)
Sätt $u = y$, $v = y'$ och $w = y''$. Det ger

$$
\begin{aligned}
u' &= y' = v, \\
v' &= y'' = w, \\
w' &= y''' = \eta y' - \sin(y) + f(t) = \eta v - \sin(u) + f(t).
\end{aligned}
$$

---

8. Systemet i uppgift 7 ska lösas med begynnelsevärdena (2 p)

$$u(0) = 0, \qquad v(0) = 2, \qquad w(0) = 1.$$

Man använder Framåt Euler och steglängden $h = 0.1$. Vad blir approximationen av lösningen efter ett steg?

A.	$u(h) \approx 0.2,$	$v(h) \approx 2.1,$	$w(h) \approx 1 + 0.1\sin(0.1) + 0.2\eta + 0.1f(0)$
B.	$u(h) \approx 0.2,$	$v(h) \approx 2.1,$	$w(h) \approx 1 + 0.2\eta + 0.1f(0)$
C.	$u(h) \approx -0.2,$	$v(h) \approx 1.9,$	$w(h) \approx 1 - 0.2\eta - 0.1f(0)$
D.	$u(h) \approx 0.2,$	$v(h) \approx 2.1,$	$w(h) \approx 1 + 0.2\eta + 0.1f(0.1)$
E.	$u(h) \approx 0.1,$	$v(h) \approx 2.2,$	$w(h) \approx 1 + 0.1\eta + 0.2f(0)$
F.	$u(h) \approx 0.2,$	$v(h) \approx 2.1,$	$w(h) \approx 1 + 0.1\sin(0.2) + 0.2\eta + 0.1f(0)$

Lösning: B. (87% av tentanderna hade rätt svar.)
Framåt Euler lyder $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)$. Med insatta värden och uttryck:

$$
\begin{aligned}
u(h) &\approx u_1 = u_0 + hv_0 = 0 + 0.1 \cdot 2 = 0.2, \\
v(h) &\approx v_1 = v_0 + hw_0 = 2 + 0.1 \cdot 1 = 2.1, \\
w(h) &\approx w_1 = w_0 + h(\eta v_0 - \sin(u_0) + f(0)) = 1 + 0.1(2\eta - \sin(0) + f(0)) = 1 + 0.2\eta + 0.1f(0).
\end{aligned}
$$

---

9. Keplers tredje lag säger att en planets omloppsradie R i kubik är lika med dess omloppstid T i kvadrat, om R mäts i astronomiska enheter och T mäts i *år*, dvs $R^3 = T^2$ i dessa enheter. Antag att vi mätt upp Merkurius omloppstid till 88 ± 1 *dagar* och vi vill räkna ut dess omloppsradie. Hur stor felgräns får vi då i svaret (i astronomiska enheter)? Felgränsen med en värdesiffra är: (3 p)

A. $1 \cdot 10^{-2}$	**B.** $3 \cdot 10^{-3}$	**C.** $8 \cdot 10^{-4}$
D. $3 \cdot 10^{-4}$	**E.** $1 \cdot 10^{-4}$	**F.** $5 \cdot 10^{-5}$

Lösning: B. (37% av tentanderna hade rätt svar.)
Om Merkurius omloppstid (i dagar) är T blir dess omloppsradie R (i astronomiska enheter)

$$R = F(T) := \left(\frac{T}{365}\right)^{2/3}.$$

Felgränsen ges av felfortplantningsformeln

$$E_R \approx \left|F'(\tilde{T})\right| E_T = \frac{2}{3}\left|\frac{\tilde{T}^{-1/3}}{365^{2/3}}\right| E_T = \frac{2}{3} \cdot \frac{88^{-1/3}}{365^{2/3}} \cdot 1 = 2 \cdot \frac{(365/88)^{1/3}}{3 \cdot 365}.$$

För att hitta vilket av alternativen som är rätt noterar vi att $365/88 \approx 4$, varför $(365/88)^{1/3}$ ligger mellan 1 och 2. Vi får då

$$\frac{2}{1095} \leq E_R \leq \frac{4}{1095},$$

vilket eliminerar alla alternativ utom **B.**

---

10. Givet följande mätvärden (2 p)

x	-2	-1	1	2
y	9	3	-1	-1

Mätvärdena ska anpassas i minstakvadratmening till ett kvadratiskt polynom där konstanttermen är noll, dvs modellen $y \approx c_1 x + c_2 x^2$. Vad blir c_1 och c_2?

A. $c_1 = -3.4, \quad c_2 = 0.7,$	**B.** $c_1 = -2.8, \quad c_2 = 0.8$
C. $c_1 = 2.5, \quad c_2 = 2.4,$	**D.** $c_1 = -3.0, \quad c_2 = 1.2$
E. $c_1 = 2.5, \quad c_2 = -2.4,$	**F.** $c_1 = -2.4, \quad c_2 = 1.0$

Lösning: F. (90% av tentanderna hade rätt svar.)
Lösningen ges av normalekvationerna $A^T A\mathbf{c} = A^T\mathbf{y}$, där

$$A = \begin{bmatrix} x_0 & x_0^2 \\ x_1 & x_1^2 \\ x_2 & x_2^2 \\ x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Det ger systemet

$$A^T A\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -24 \\ 34 \end{bmatrix},$$

vilket har lösningen $c_1 = -2.4$ och $c_2 = 1$.