Tentamen del 1
Numeriska metoder SF1511/SF1518/SF1519
14.00-17.00 15/12 2020

Examinator: Mattias Sandberg

Skriv namn och personnummer på varje inlämnat blad.

De nio uppgifterna på del 1 kan maximalt ge 19 poäng. Gränsen för betyg E är 11 poäng. **Till varje uppgift finns ett antal svarsalternativ. För full poäng skall rätt svarsalternativ och kortfattad lösning redovisas.** Del 2 rättas endast om minst 11 poäng erhållits på del 1.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Lämna in dina svar och lösningar för respektive uppgift under "Uppgifter" i Canvas.

0. Hederskodex. Se uppgift 0 i Canvas. Har du inte lämnat in hederskodexen tidigare behöver du göra det nu.

1. (2p) Ett steg med metoden Bakåt Euler tillämpat på differentialekvationen $y'(t) = t - 2y(t)$ med begynnelsevärdet $y(0) = 0$ ger $y(0.5)$ den approximativa lösningen

A. 0	**C.** 1/8	**E.** 1/4	**G.** 1/2
B. 1/12	**D.** 1/6	**F.** 1/3	**H.** 1

2. (2p) Givet matlabkoden

```
clear all, close all, clc
x = [-3  -0.5  1.2  4]';
y = [-2  0.7  0.9  5]';
A = [];
for  k = 1:length (x)
    A = [A   x.^(k-1)];
end
c = A \ y;
yVek = [];
xm = [min(x):0.1:max(x)]';
for  m = 1:length (xm)
    ym = 0;
    for  n = 1:length (c)
        ym = ym + c(n) * xm(m)^(n-1);
    end
    yVek = [yVek ; ym];
end
plot (x, y, '*', xm, yVek)
```

Vilken metod / vad gör matlabprogrammet?

A. Finita differensmetoden
B. Fixpunktsmetoden
C. Framåt Euler
D. Interpolation
E. Konvergensstudie
F. Newton-Raphsons metod
G. Trapetsregeln

3. (2p) Finita differensmetoden med centraldifferensapproximation av derivata-termen och steglängden $h = 2$ för differentialekvationen

$$y''(x) = x - y(x) + 1,$$

med randvärdena $y(7) = 3$, $y(11) = 5$, ger $y(9)$ det approximativa värdet

A. 2 **C.** 6 **E.** 10 **G.** 14
B. 4 **D.** 8 **F.** 12 **H.** 16

4. (3p) Om integralen

$$\int_{-0.5}^{1} (20x^2 - 10x + 1)\, dx$$

approximeras med trapetsregeln och steglängden 0.5 blir resultatet

A. 4.75 **C.** 5.25 **E.** 5.75 **G.** 6.25
B. 5 **D.** 5.5 **F.** 6 **H.** 6.5

5. (2p) En integral med exakt värde I approximeras med en numerisk metod som beror av en steglängdsparameter h. Resultatet av approximationen kallas I_h. Approximationen har följande trunkeringsfel vid respektive steglängd.

h	$I_h - I$
0.4	0.775
0.2	0.098
0.1	0.012

Vad har metoden för noggrannhetsordning?

A. 1 **C.** 3 **E.** 5 **G.** 7
B. 2 **D.** 4 **F.** 6 **H.** 8

6. (2p) Anpassa $y = c_1 \cos(\frac{\pi}{2}x) + c_2 x^4$ med minstakvadratmetoden till de tre datapunkterna

x	-1	0	1
y	1/2	1	1

Vad blir (c_1, c_2)?

A. $(1/2, -1/2)$ **C.** $(1, -1)$ **E.** $(2, -2)$ **G.** $(1, 0)$

B. $(1, 3/4)$ **D.** $(-1, 1)$ **F.** $(-2, 2)$ **H.** $(2, 1)$

7. (2p) Ett steg med Newtons metod från startpunkten $(x, y) = (0, 1)$ tillämpat på ekvationssystemet

$$x \sin(x) + y^2 - 1 = 0,$$
$$\frac{x}{1 + y^2} - 1 = 0,$$

ger $(x, y) =$

A. $(0, 0)$ **C.** $(1, 0.5)$ **E.** $(1, 1)$ **G.** $(-1, 1)$

B. $(-1, 0.5)$ **D.** $(2, 1)$ **F.** $(1, -1)$ **H.** $(-1, -1)$

8. (2p) Fixpunktsiterationerna

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

med startpunkten $x_0 = 1$ konvergerar mot

A. -1 **C.** 0 **E.** 1/2 **G.** 2

B. -1/2 **D.** $1/\sqrt{2}$ **F.** 1 **H.** iterationerna konvergerar ej

9. (2p) Felgränsen för $z = \frac{x+y}{x-y}$ där $x = 2.00 \pm 0.02$ och $y = 1.00 \pm 0.03$ ges approximativt av (välj det alternativ nedan som är närmast den exakta felgränsen)

A. 0 **C.** 0.02 **E.** 0.05 **G.** 0.16

B. 0.01 **D.** 0.03 **F.** 0.08 **H.** 0.52

Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen del 2
Numeriska metoder SF1511, SF1518, SF1519
14.00-17.00 15/12 2020

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas endast om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng, av maximalt 50 poäng på del 2.

10a. (7p) Bestäm ett polynom $p(x)$ av grad två som uppfyller

$$p(0) = 0, \quad p(1) = 2, \quad p(3) = 0. \tag{A}$$

10b. (8p) Bestäm ett polynom $q(x)$ av grad tre som uppfyller villkoren (A) och även

$$\int_0^1 q(x)\, dx = 3.$$

11. Utsvängningsvinkeln $\theta(t)$ för en pendel, dvs. vinkeln mellan pendeln och lodlinjen, löser differentialekvationen

$$\theta''(t) + \alpha\theta'(t) + g \sin\big(\theta(t)\big) = 0, \tag{B}$$

där g är tyngdaccelerationen och α är en friktionsparameter. Vi har att $g = 9.82$ och $\alpha = 0.1$. Vinkeln θ mäts i radianer. Pendeln släpps vid tiden $t = 0$ från vinkeln 10 grader, dvs. $\theta(0) = \pi/18$ (radianer). Vinkelhastigheten vid tiden $t = 0$ är noll, dvs. $\theta'(0) = 0$.

11a. (5p) Skriv om differentialekvationen (B) som ett system av första ordningens differentialekvationer. Ange begynnelsevillkoren för detta system.

11b. (8p) Skriv ett Matlab-program som med metoden Framåt Euler och steglängden $h = 0.01$ bestämmer en approximation av $\theta(10)$, dvs. utsvängningsvinkeln efter 10 sekunder, och skriver ut denna approximation på skärmen.

11c. (7p) På grund av friktionen så avtar amplituden för pendelns svängningar med tiden. I pendelns vändlägen gäller $\theta'(t) = 0$. Kalla tiderna när detta sker för $t_1, t_2, \ldots$. Skriv ett Matlab-program som beräknar en approximation av tiden det tar tills svängningarnas amplitud sjunker under 1 grad ($= \pi/180$ radianer), dvs. det första t_i sådant att $|\theta(t_i)| \leq \pi/180$. Programmet ska skriva ut denna tid på skärmen.

12. Låt $f(x)$ vara en tre gånger kontinuerligt deriverbar funktion.

12a. (7p) Visa att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

12b. (8p) Ange noggrannhetsordningen för differenskvot-approximationen $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ av $f'(a)$. Bevisa ditt påstående.