Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen del 2
Numeriska metoder SF1511, SF1518, SF1519
14.00-17.00 15/12 2020

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas endast om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng, av maximalt 50 poäng på del 2.

10a. (7p) Bestäm ett polynom $p(x)$ av grad två som uppfyller

$$p(0) = 0, \quad p(1) = 2, \quad p(3) = 0. \tag{A}$$

10b. (8p) Bestäm ett polynom $q(x)$ av grad tre som uppfyller villkoren (A) och även

$$\int_0^1 q(x)\,dx = 3.$$

10a. Newtons ansats för det interpolerande polynomet är

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1).$$

De givna funktionsvärdena bestämmer koefficienterna i $p(x)$.

$$\begin{aligned} p(0) &= a_0 = 0, \\ p(1) &= a_0 + a_1 = 2 \implies a_1 = 2, \\ p(3) &= a_0 + 3a_1 + 6a_2 = 0 \implies a_2 = -1. \end{aligned}$$

10b. Eftersom polynomet $p(x)$ interpolerar de givna datapunkterna kan vi med hjälp av Newtons ansats lägga till en tredjegradsterm som är noll i datapunkterna. Polynomet

$$q(x) = p(x) + a_3 x(x-1)(x-3)$$

kommer därmed också att interpolera de tre punkterna. Vi använder integralvillkoret för att bestämma koefficienten a_3:

$$\begin{aligned} \int_0^1 q(x)\,dx &= \int_0^1 p(x)\,dx + a_3 \int_0^1 x(x-1)(x-3)\,dx \\ &= \int_0^1 (-x^2+3x)\,dx + a_3 \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \frac{7}{6} + \frac{5}{12}a_3 = 3. \end{aligned}$$

Detta ger att koefficienten $a_3 = \frac{22}{5}$.

11. Utsvängningsvinkeln $\theta(t)$ för en pendel, dvs. vinkeln mellan pendeln och lodlinjen, löser differentialekvationen

$$\theta''(t) + \alpha\theta'(t) + g\sin\big(\theta(t)\big) = 0, \tag{B}$$

där g är tyngdaccelerationen och α är en friktionsparameter. Vi har att $g = 9.82$ och $\alpha = 0.1$. Vinkeln θ mäts i radianer. Pendeln släpps vid tiden $t = 0$ från vinkeln 10 grader, dvs. $\theta(0) = \pi/18$ (radianer). Vinkelhastigheten vid tiden $t = 0$ är noll, dvs. $\theta'(0) = 0$.

11a. (5p) Skriv om differentialekvationen (B) som ett system av första ordningens differentialekvationer. Ange begynnelsevillkoren för detta system.

11b. (8p) Skriv ett Matlab-program som med metoden Framåt Euler och steglängden $h = 0.01$ bestämmer en approximation av $\theta(10)$, dvs. utsvängningsvinkeln efter 10 sekunder, och skriver ut denna approximation på skärmen.

11c. (7p) På grund av friktionen så avtar amplituden för pendelns svängningar med tiden. I pendelns vändlägen gäller $\theta'(t) = 0$. Kalla tiderna när detta sker för $t_1, t_2, \ldots$. Skriv ett Matlab-program som beräknar en approximation av tiden det tar tills svängningarnas amplitud sjunker under 1 grad ($= \pi/180$ radianer), dvs. det första t_i sådant att $|\theta(t_i)| \leq \pi/180$. Programmet ska skriva ut denna tid på skärmen.

11a. Inför funktionerna $y_1(t) = \theta(t)$ *och* $y_2(t) = \theta'(t)$. *Pendelekvationen kan skrivas om som följande system av första ordningens differentialekvationer:*

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t), \\ y_2'(t) &- g\sin y_1(t) - \alpha y_2(t), \end{aligned}$$

med begynnelsevillkoren $y_1(0) = \pi/18$ *och* $y_2(0) = 0$.

10b.

```
T=10;
N=1e3;
h=T/N;
g=9.82;
alpha=0.1;

y=zeros(N+1,2);
```

```
y(1,:)=[pi/18 0];    %Inititalkonfiguration

for n=1:N
    y(n+1,:)=y(n,:)+h*[y(n,2) -g*sin(y(n,1))-alpha*y(n,2)];
end
disp(['Vinkeln efter 10 sekunder: ',num2str(y(N+1,1))])
```

10c. Programmet nedan bestämmer amplituden varje gång $\theta'(t) = y_2(t)$ växlar tecken, dvs. då $\theta'(t) \approx 0$.

```
h=0.01;
g=9.82;
alpha=0.1;
y=[pi/18 0];    %Inititalkonfiguration

Amp=pi/18;   %Initialisering
n=1;

while Amp>pi/180
    y(n+1,:)=y(n,:)+h*[y(n,2) -g*sin(y(n,1))-alpha*y(n,2)];
    if y(n+1,2)*y(n,2) <=0
        Amp=abs(y(n,1));
    end
    n=n+1;
end

disp(['Tiden tills utsvangningen blir mindre an en grad: ',num2str(n*h)])
```

12. Låt $f(x)$ vara en tre gånger kontinuerligt deriverbar funktion.

12a. (7p) Visa att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

12b. (8p) Ange noggrannhetsordningen för differenskvot-approximationen $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ av $f'(a)$. Bevisa ditt påstående.

12a. Vi skriver om differenskvoten genom att subtrahera och addera med $f(a)$:

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{2h} + \frac{f(a) - f(a-h)}{2h} \to \frac{f'(a)}{2} + \frac{f'(a)}{2}, \quad \text{då } h \to 0,$$

där gränsvärdet följer av derivatans definition.

12b. Centraldifferens har noggrannhetsordning 2. För beviset av detta påstående se sidorna 245 och 246 i läroboken av Sauer.