

Kontrollskrivning i matematik för Teknisk bastermin, 2021-01-25

Tillåtna hjälpmedel: Godkänd (ej formelhanterande) räknare, godkänd formelsamling och skrivmateriel.

Maxpoäng på denna kontrollskrivning är 12. Till samtliga uppgifter krävs fullständiga lösningar. 7p motsvarar "godkäntnivå"- det ger ingen bonus på tentan men indikerar vad som skulle vara godkäntnivå på era förkunskaper.

1) Lös ekvationen $x^5 = 49x^3$. (2p)

2) Bestäm värdet av följande uttryck: $\frac{5}{6} + \frac{3}{14} + \frac{5}{21}$
Svara exakt, med ett bråk som är förkortat så långt det går. (2p)

3) Utveckla och förenkla uttrycket $(4x - 2)^2 - (x + 2) \cdot (x - 1) + 5x + 15$ så långt som möjligt. (2p)

4) Låt $f(x) = \frac{5}{\sqrt[9]{x^4}} + 3x^{10} + e^{-12x} + 2\sqrt{3}$. Bestäm $f'(x)$. (2p)

5) Bestäm för funktionen $f(x) = 2x^4 - 2x^2$ eventuella
(i) lokala maxpunkter
(ii) lokala minpunkter
(iii) terrasspunkter (2p)

6) Bestäm den största vinkeln i en triangel med sidlängderna 10 m, 15 m och 20 m. (2p)

Lösningsförslag

1) $x^5 = 49x^3$

$$x^5 - 49x^3 = 0$$

$$(x^2 - 49) \cdot x^3 = 0, \quad \text{Nollprodukt ger:}$$

$$x^2 - 49 = 0 \quad \text{eller} \quad x^3 = 0$$

$$x = \pm 7 \quad \text{eller} \quad x = 0$$

Svar: $x = -7$, $x = 0$ eller $x = 7$.

2) Primtalsfaktorisera nämnarna för att kunna beräkna minsta gemensamma nämnare (MGN):

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{14} + \frac{5}{21} = \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 7} + \frac{5}{3 \cdot 7} \quad \text{MGN} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} + \frac{3}{14} + \frac{5}{21} &= \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 7} + \frac{5}{3 \cdot 7} = \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{35}{2 \cdot 3 \cdot 7} + \frac{9}{2 \cdot 3 \cdot 7} + \frac{10}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \\ &= \frac{54}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{9}{7} \end{aligned}$$

Svar: $\frac{9}{7}$

3) $(4x - 2)^2 - (x + 2) \cdot (x - 1) + 5x + 15 = 16x^2 - 16x + 4 - (x^2 + 2x - x - 2) + 5x + 15 =$
 $= 16x^2 - 16x + 4 - x^2 - 2x + x + 2 + 5x + 15 = 15x^2 - 12x + 21$

Svar: $15x^2 - 12x + 21$

4) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[9]{x^4}} + 3x^{10} + e^{-12x} + 2\sqrt{3} = 5 \cdot x^{-\frac{4}{9}} + 3x^{10} + e^{-12x} + 2\sqrt{3}$

$$f'(x) = 5 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) \cdot x^{-\frac{13}{9}} + 3 \cdot 10 \cdot x^9 + (-12) \cdot e^{-12x} + 0 = -\frac{20}{9} \cdot x^{-\frac{13}{9}} + 30x^9 - 12e^{-12x} =$$

$$= -\frac{20}{9 \cdot \sqrt[9]{x^{13}}} + 30x^9 - 12e^{-12x}$$

Svar: $f'(x) = -\frac{20}{9 \cdot \sqrt[9]{x^{13}}} + 30x^9 - 12e^{-12x}$

5) Maxima, minima och terrasspunkter finner man i punkter där förstaderivatan är noll (stationära punkter) eller i definitionsmängdens ändpunkter. Denna funktions definitionsmängd saknar ändpunkter, så det räcker att undersöka derivatans nollställen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 8x^3 - 4x \\ f'(x) &= 8x^3 - 4x = (8x^2 - 4) \cdot x = 0 \\ 8x^2 - 4 &= 0 \quad \text{eller} \quad x = 0 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Det finns alltså tre stationära punkter. Undersök deras karaktär:

Teckenschema:

x		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$8x^2 - 4$	+	0	-	-	-	0	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	avtar	Minpunkt	växer	Maxpunkt	avtar	Minpunkt	växer

(Man kan även göra en undersökning m.h.a. andraderivatan)

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2} \\ f(0) &= 2 \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 = 0 \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Svar: Två minpunkter i $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ och $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$. En maxpunkt i $(0,0)$. Ingen terrasspunkt.

6) Cosinussatsen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

Den största vinkeln står mot den längsta sidan. Låt A vara den största vinkeln i triangeln, då blir a den längsta sidan (20 m):

$$20^2 = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{20^2 - 15^2 - 10^2}{-2 \cdot 15 \cdot 10} = -0,25 \Rightarrow A \approx 104^\circ$$

(Man kan naturligtvis beräkna samtliga vinklar och ser då vilken som är störst)

Svar: 104° .

Rättningsmall

- | | |
|--|-----|
| 1. Varje saknad lösning | -1p |
| 2. Bestämmer ett närmevärde m. h. a. räknare | 0p |
| Svarar med ett korrekt beräknat bråk, som inte har förkortats så långt det går | -1p |
| 3. Enstaka algebraiskt fel | -1p |
| Ofullständigt förenklat svar | -1p |
| 4. Varje felaktigt deriverad term | -1p |
| Korrekt svar på potensform i stället för med en rot (första termen). | -0p |
| 5. Beräknar ej funktionsvärden i min- och maxpunkter. | -1p |
| Punkternas karaktär ej bestämd / felaktigt bestämd | -1p |
| Varje saknat nollställe till derivatan | -1p |
| 6. Beräknar enbart största vinkeln utan att på något sätt motivera varför denna vinkel måste vara störst | -1p |