NÅGRA OFTA FÖREKOMMANDE KONTINUERLIGA FÖRDELNINGAR

Fördelning	**Frekvensfunk.** $f(x)$	**Fördelningsfunk.** $F(x)$	**Väntevärde**	**Varians**
Rektangel (uniform, likformig)	$\frac{1}{b-a}$, $a \le x \le b$ 0 *för övrigt*	$\frac{x-a}{b-a}$, $a \le x \le b$ 0 om $x < a$ 1 om $x > b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$ $x \ge 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normal	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$	μ	σ^2

Uppgift 1. En stokastisk variabel ξ är rektangulärfördelad och har frekvensfunktionen

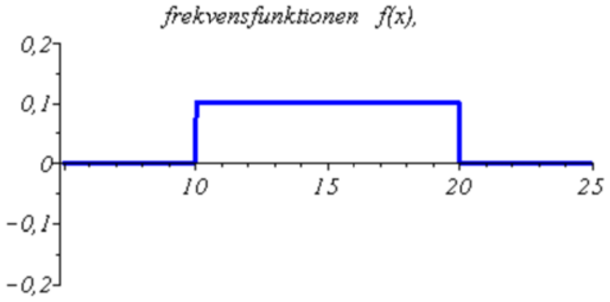
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ h & , \quad 10 \le x \le 20 \\ 0 & , \quad x > 20 \end{cases}$$

a) Bestäm konstanten h.
b) Vad är sannolikheten att $10 \le \xi \le 12$?
c) Bestäm väntevärdet och variansen för ξ.

Lösning:
a)

$$h = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{10}$$

(Man kan använda ovanstående formel för frekvensfunktionen eller, alternativt, rita rektangeln och bestämma h så att arean mellan x-axeln och $f(x)$ blir 1.)



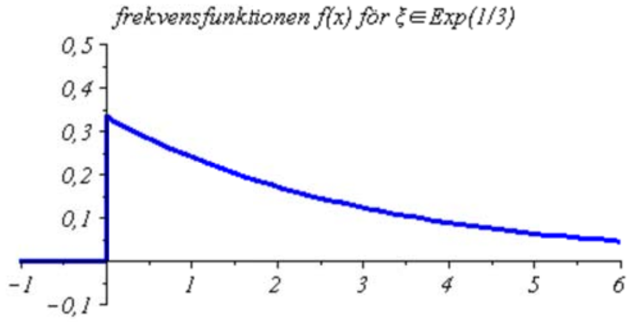
b) $\boldsymbol{P}(10 \le \xi \le 12) =$ (Rektangelfördelning) $= \frac{(12-10)}{(20-10)} = \frac{2}{10} = 0.2$
Alternativt kan vi använda fördelningsfunktionen rektangelfördelning

$$\boldsymbol{P}(10 \le \xi \le 12) = F(12) - F(10) = \frac{(12-10)}{(20-10)} - \frac{(10-10)}{(20-10)} = 0.2 - 0 = 0.2$$

c) Väntevärdet $E(\xi) = \frac{a+b}{2} = 15$
Variansen $V(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$

Uppgift 2. En elektronisk komponent har exponentialfördelad livslängd ξ med medelvärdet 3 år.
a) Bestäm parameter λ för exponentialfördelningen.
b) Beräkna sannolikheten att en komponent har livslängden $\xi \le 2$.
c) Vad är sannolikheten att av 5 sådana komponenter högst en har livslängden $\xi \le 2$?

Lösning:
a)
Sambandet mellan väntevärdet och parametern λ i en **exponentialfördelning** (se ovanstående formel) är
Väntevärdet: $= \frac{1}{\lambda}$.
Härav $\frac{1}{\lambda} = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$
Därmed ξ $\in Exp\left(\frac{1}{3}\right)$.



b) P $(\xi \le 2) = F(2)$
$= [1 - e^{-\lambda x}] = 1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 2}$

≈ 0.48658

c) Låt η vara antalet komponenter med livslängden $\xi \le 2$ bland de 5.

Då gäller η $\in \text{Bin}(5, p\ )$ där p= 0.48658

$P(\eta \le 1) = \binom{5}{0}p^0(1-p)^5 + \binom{5}{1}p^1(1-p)^4 =$ 0.035675+0.16905=0.20472

i) NORMALFÖRDELNINGEN (GAUSSFÖRDELNINGEN)

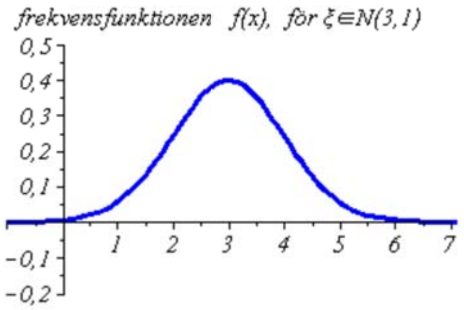
Om en s.v. ξ har frekvensfunktionen $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $,-\infty < x < \infty$

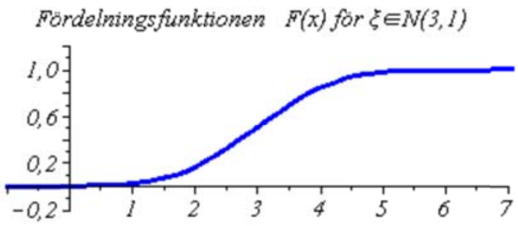
där $-\infty < \mu < \infty$ och $\sigma > 0$ säger vi att ξ är normalfördelad och betecknar

$$\xi \in N(\mu,\sigma)$$

Fördelningsfunktionen betecknar vi med $F(x)$.

Exempel:





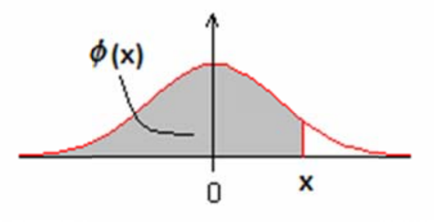
ii) DEN STANDARDISERADE NORMALFÖRDELNINGEN

Låt η vara en normalfördelad s. v. med $\mu = 0$ och $\sigma = 1$ d v s

$$\eta \in N(0,1)$$

Då är η den så kallade STANDARDISERADE NORMALFÖRDELNINGEN

Täthetsfunktionen (=frekvensfunktionen) är



$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}} \qquad ,-\infty < x < \infty$$

Tillhörande fördelningsfunktion betecknar vi med $\Phi(x)$.

ETT VIKTIGT SAMBAND mellan fördelningsfunktionen $F(x)$ för en normalfördelad s. v

$$\xi \in N(\mu,\sigma)$$

och standardiserade fördelningsfunktionen $\Phi(x)$ är

$$\boxed{F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})}$$

Detta samband härleder vi med hjälp av variabelbyte i integralen

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

Vi substituerar $\frac{t-\mu}{\sigma}=v$ och därmed $\frac{dt}{\sigma}=dv \Rightarrow dt=\sigma dv$.

Nya gränser: $t=-\infty \Rightarrow v=-\infty$ och $t=x \Rightarrow v=\frac{x-\mu}{\sigma}$

Alltså $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-v^2}{2}}\sigma dv=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}e^{\frac{-v^2}{2}}dv=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$

dvs $F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ v.s.v.

Vi kan beräkna $F(x)$ med hjälp av sambandet $F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ och en tabell för Φ . (Vi upprepar att Φ är fördelningsfunktionen för standardiserade normalfördelningen N(0,1))

Exempel 1.

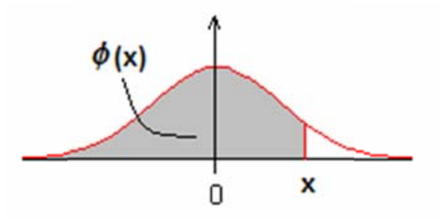
Bestäm $P\ (\xi\ \le 0.34)$

Vi använder följande tabell (med positiva x) i formelsamlingen
" Formler och tabeller i statistik "

Tabell 5: Normalfördelningen, $\xi \in N(0,1)$ **,**
positiva x-värden, $x \ge 0$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-t^2}{2}}dt$$

$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$



x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	**0,6331**	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224

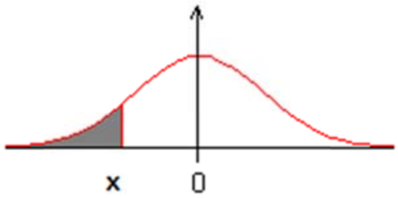
$P(\xi\ \le 0.34)\ =\Phi(0.34)=\mathbf{0.6331}$

Exempel 2.
Bestäm $P\ (\xi\ \leq\ -0.42)$

Vi använder följande tabell (med negativa x) i formelsamlingen
” Formler och tabeller i statistik ”

Tabell 6: Normalfördelningen, $\xi \in N(0,1)$ **,**
negativa x-värden, $x \leq 0$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$$



x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
- 0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
- 0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
- 0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
- 0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
- 0,4	0,3446	0,3409	**0,3372**	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
- 0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776

…….

Svar: $P\ (\xi\ \leq\ -0.42) = \Phi(-0.42) =$ **0.3372.**

Uppgift 3. Låt $\xi\ \in N(0,1)$.
Bestäm (med hjälp av tabellen för fördelningsfunktionen $\Phi(x)$ till standardiserade normalfördelning, sidor 13-14 i formelsamlingen) följande sannolikheter:

a) $P(\xi\ \leq 2.41)$ b) $P(\xi\ < 2.41)$ c) $P(\xi\ > 2.41)$ d) $P(\xi\ \geq 2.41)$
e) $P(\xi\ \leq -1.23)$ f) $P(\xi\ > -1.23)$
g) $P(0.32 < \xi\ < 1.42)$ h) $P(-0.26 < \xi\ < 1.22)$

Lösning:
a) $P(\xi\ \leq 2.41) = \Phi(2.41) =$ 0.9920
b) $P(\xi\ < 2.41)$ =(kontinuerlig s.v) $= P(\xi\ \leq 2.41) = \Phi(2.41) =$ 0.9920
c) $P(\xi\ > 2.41) = 1 - P(\xi\ \leq 2.41) = 1 - \Phi(2.41) = 0.0080$
d) $P(\xi\ \geq 2.41) =$ (kontinuerlig s.v) $= P(\xi\ > 2.41) = 1 - \Phi(2.41) = 0.0080$
e) $P(\xi\ \leq -1.23) = \Phi(-1.23)$ =0.1093
f) $1 - \Phi(-1.23)$ =0.8907
g) $P(0.32 < \xi\ < 1.42) = \Phi(1.42) - \Phi(0.32) = 0.2967$
h) $P(-0.26 < \xi\ < 1.22) = \Phi(1.22) - \Phi(-0.26) = 0.4914$

Uppgift 4. (Inversen till $\Phi(x)$)
Låt $\xi \in N(0,1)$. Bestäm x så att
a) $P(\xi \leq x) = 0.8765$ b) $P(\xi \leq x) = 0.2345$

Lösning:

Metod 1. Vi använder sidor 13-14 i formelsamlingen.
a) Vi har $\Phi(x) = 0.8765$ och söker x. Från tabellen väljer vi sannolikheten som är närmast 0.8765 och detta är 0,8770 .
Motsvarande x är 1.16.
Svar a) $x = 1.16$
b) x = -0.72

Metod 2.
a) Vi har $\Phi(x) = 0.8765$ och söker x. Vi avrundar $\Phi(x)$ till två decimaler, $\Phi(x) = 0.88$ använder tabellen på sida 15 som direkt ger inversen till $\Phi(x)$.
Vi får x =1.175.
b) $\Phi(x) = 0.2345 \approx 0.23$.
Från tabellen på sida 15 får vi $x = -0.7388$
(Notera skillnaden i svaren med metoderna 1 och 2. Båda svar är faktiskt approximativa, och accepteras på tentamina och KS.)

Uppgift 5. Låt $\xi \in N(10,2)$.
Bestäm följande sannolikheter:

a) $P(\xi < 11)$ b) $P(\xi < 8)$, c) $P(\xi > 8)$ d) $P(8 < \xi < 11)$.

Lösning: Vi använder $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ där $\mu = 10$, $\sigma = 2$
dvs

$$F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-10}{2})$$

a) $P(\xi < 11) = F(11) = \Phi(\frac{11-10}{2}) = \Phi(0.5) = (tabellen) = 0.6915$

b) $P(\xi < 8) = F(8) = \Phi(\frac{8-10}{2}) = \Phi(-1) = (tabellen) = 0.1587$

c) $P(\xi > 8) = 1 - P(\xi < 8) = 1 - F(8) = 0.8413$

d) $P(8 < \xi < 11) = F(11) - F(8) = 0.6915 - 0.1587 = 0.5328$

Uppgift 6. Låt $\xi \in N(50,2)$.
Bestäm (betingade) sannolikheten att $\xi > 49$ om vi vet att $47 < \xi < 52$.

Lösning:
Vi betecknar med A händelsen $\xi > 49$

och med B händelsen $47 < \xi < 52$

Vi ska bestämma $P(A|B)$.

Eftersom $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, först beräknar vi $P(A \cap B)$ och $P(B)$.

$$P(A \cap B) = P(49 < \xi < 52) = F(52) - F(49) = 0.8413 - 0.3085 = 0.5328$$
$$P(B) = P(47 < \xi < 52) = F(52) - F(47) = 0.8413 - 0.06681 = 0.7745$$

Därför $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.5328}{0.7745} = 0.6879$

Nedanstående uppgift visar att ett normalfördelad s.v. $\xi \in N(\mu,\sigma)$ ligger i intervallet $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$ med 95.4% sannolikhet.

Uppgift 7. Låt $\xi \in N(\mu,\sigma)$. Bestäm sannolikheten $P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma)$.

Lösning:

$$P(\mu - 2\sigma < \xi < \mu + 2\sigma) = F(\mu + 2\sigma) - F(\mu - 2\sigma) = \Phi(\frac{(\mu+2\sigma)-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{(\mu-2\sigma)-\mu}{\sigma}) =$$

$$= \Phi(\frac{2\sigma}{\sigma}) - \Phi(\frac{-2\sigma}{\sigma}) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0.9772 - 0.0228 \approx 0.954$$

Svar: **0.954**

Uppgift 8. Låt $\xi \in N(\mu,\sigma)$. Bestäm sannolikheten $P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma)$.

Lösning:

$$P(\mu - 3\sigma < \xi < \mu + 3\sigma) = F(\mu + 3\sigma) - F(\mu - 3\sigma) = \Phi(\frac{(\mu+3\sigma)-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{(\mu-3\sigma)-\mu}{\sigma}) =$$

$$= \Phi(\frac{3\sigma}{\sigma}) - \Phi(\frac{-3\sigma}{\sigma}) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0.99865 - 0.00130 \approx 0.997$$

Svar: 0.997