POISSONFÖRDELNING

Poissonfördelningen används oftast för att beskriva antalet händelser som inträffar oberoende av varandra under ett givet tidsintervall. En Poissonfördelad stokastisk variabel X kan anta en av följande värden 0, 1, 2, 3, ... (icke-negativa heltal eftersom X= antalet händelser under en given tidsperiod)

Exempelvis 1. antalet kunder som kommer till ett kösystem eller
2. antalet datapaket som kommer till en server

kan modelleras som Poissonfördelade stokastiska variabler.

Definition 1. Låt X vara en diskret stokastisk variabel vars värdemängd är 0, 1, 2,...k,...
Vi säger att X är en Poissonfördelning med parameter λ och betecknar $X \in Po(\lambda)$ om X har följande sannolikhetsfunktion

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}, \qquad k=0,1,2,3...$$

Anmärkning: Parameter λ i Poissonfördelningen kallas oftast för intensitet.

Egenskaper:

1. Låt X vara Poissonfördelad s.v. med parameter λ, dvs $X \in Po(\lambda)$. Då gäller

a) väntevärdet E(X) = λ

b) variansen $\sigma^2=\lambda$ och därmed

c) standardavvikelsen $\sigma=\sqrt{\lambda}$

2. (Viktigt i köteori) Om $X_1, X_2,..., X_n$ är oberoende Poissonfördelade s.v. med parametrar $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, då är summan $X_1+X_2+...+X_n$ också en Poissonfördelad s.v. med parameter $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n$.

3. (Andra intervall) Låt $X \in Po(\lambda)$ vara en s.v. som beskriver antalet händelser som inträffar under en viss tidsperiod av längden L. Alltså λ händelser inträffar i genomsnitt under tidsperiod av längden L och därmed λt händelser inträffar i genomsnitt under tidsperiod av längden $L\cdot t$. Låt Y vara antalet händelser under tidsperioden $L\cdot t$. Då är $Y \in Po(\lambda t)$, med andra ord

$$P(Y=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t}, \qquad k=0,1,2,3...$$

4. (Sambandet mellan Poissonfördelning och exponentialfördelning)
Om antalet händelser $K(t)$ under en tidsperiod av längden t är Poissonfördelad, $K(t)\in Po(\lambda t)$, så är tiden T mellan två konsekutiva händelser exponentialfördelad, $T \in \exp(\lambda)$ dvs

$$P(T\le t)=1-e^{-\lambda t}.$$

5. (Approximation med normalfördelning)
Om $\lambda>15$ då kan en Poissonfördelad s.v. $X \in Po(\lambda)$ approximeras med normalfördelningen $N(\mu,\sigma)$ där $\mu=\lambda$ och $\sigma=\sqrt{\lambda}$.

Uppgift 1. Låt X vara Poissonfördelad , $X \in Po(3)$.
Bestäm
a) P(2 ≤X <5).
b) P(X ≤ 2).
c) P(X >3).

Lösning:
a) P(2 ≤X <5)= P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)

$$= \frac{3^2}{2!}\cdot e^{-3} + \frac{3^3}{3!}\cdot e^{-3} + \frac{3^4}{4!}\cdot e^{-3} = e^{-3}\left(\frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!}\right) = 0.61611$$

b) [P(X=0)+P(X=1)+ P(X=2)]= $\frac{3^0}{0!}\cdot e^{-3} + \frac{3^1}{1!}\cdot e^{-3} + \frac{3^2}{2!}\cdot e^{-3}$ =0.42319

c) P(X >3) =1–P(X ≤3)=1– [P(X=0)+P(X=1)+ P(X=2)+P(X=3)]=1– 0.64723= 0.35277.

Uppgift 2. Låt X vara Poissonfördelad, $X \in Po(9)$.
Bestäm
a) P(X =8).
b) P(X ≤ 4).
c) P(X >2).

Svar:
a) 0.13176 b) 0.05496 c) 0,993768

Uppgift 3.
Låt K(t) beteckna antalet kunder som ankommer till ett system i tidsintervallet (0,t), där t betecknar antal minuter. Vi antar att ankomsten är Poissonfördelad och att det i genomsnitt ankommer λ =2 kunder per minut.

Bestäm sannolikheterna för följande händelser:
a) 3 kunder ankommer i tidsintervallet vars längd är 2 minuter.
b) Ingen kund ankommer i tidsintervallet vars längd är 30 sekunder (0.5 min).
c) Högst 5 kunder ankommer i tidsintervallet vars längd är 3 minuter.

Lösning
a) Först bestämmer vi ankomstintensitet för 2 minuter. I genomsnitt ankommer λ =2 kunder per 1 minut och därför under tidsperioden av 2 min ankommer i genomsnitt 2*2=4 kunder.
Låt Y_1 vara s.v som beskriver ankomst under 2 minuter. Då är $Y_1 \in Po(\lambda t) = Po(4)$

Därför P(Y_1 =3)= $\frac{4^3}{3!}\cdot e^{-4}$ =0.195367

b) $Y_2 \in Po(\lambda t) = Po(2\cdot 0.5) = Po(1)$

P(Y_2=0) = $\frac{1^0}{0!}\cdot e^{-1} = e^{-1}$ =0.367879

c) $Y_3 \in Po(\lambda t) = Po(2 \cdot 3) = Po(6)$

P($Y_3 \le 5$) = p0+p1+p2+p3+p4+p5= 0.44568

Uppgift 4. På ett kontor finns tre telefoner. Antalet ankommande samtal för respektive telefon är Poissonfördelade s.v. med respektive parametrar (intensiteter) 2, 3 och 5 samtal per en timme. Bestäm sannolikheten att under en 8-timmars arbetsdag ankommer totalt minst 70 samtal till kontoret.

Lösning: Summan av Poissonfördelade s.v. är en Poissonfördelad sv. Under 8 timmar ankommer till kontoret totalt 8*(2+3+5)= 80 samtal i genomsnitt .
Låt X beteckna det totala antalet samtal som ankommer till kontoret under 8 timmar.
Då är $X \in Po(80)$.

$P(X \ge 70) = 1 - P(X < 70) =$ (diskret fördelning) $= 1 - P(X \le 69) = 1 - F_X(69)$.

Det är tidskrävande att beräkna $F_X(69)$ med en miniräknare, därför approximerar vi Poisson- med normalfördelning $Y \in N(\mu, \sigma)$ där $\mu = \lambda = 80$ och $\sigma = \sqrt{80}$.

$$1 - P(X \le 69) = 1 - F_X(69) \approx 1 - F_Y(69) = 1 - \Phi\left(\frac{69-80}{\sqrt{80}}\right) = 1 - \Phi(-1.23) = 1 - 0.1093 = 0.8907$$

Svar: $\approx$ 0.9 =90%

TEORIFRÅGOR

Uppgift T1. Låt X vara Poissonfördelad s.v. med parameter λ, dvs $X \in Po(\lambda)$.

Då gäller $P(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Bevisa att $\sum_k p_k = 1$.

Lösning:

$$\sum_k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \overset{*}{=} e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1,$$ vilket skulle bevisas.

Anmärkning. I övergången $\overset{*}{=}$ har vi använt den kända formeln $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$.

Uppgift T2. Låt X vara Poissonfördelad s.v. med parameter λ, dvs $X \in Po(\lambda)$.

Då gäller $P(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Bevisa att $E(X) = \lambda$.

Lösning:

$$E(X) = \sum_k x_k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda},$$ (subst. k-1=j)

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \overset{*}{=} \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda,$$ vilket skulle bevisas.

Anmärkning. I övergången $\stackrel{*}{=}$ har vi använt den kända formeln $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$.

Uppgift T3. (svår):

Låt X_n vara en följd av binomialfördelade s.v. sådana att $P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Anta att $np = \lambda$ är en konstant då $n \to \infty$.
Visa att X_n går mot Poissonfördelning dvs visa att

$$\lim_{n\to\infty}(P(X_n = k)) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} .$$

Bevis.
Låt $k \ge 0$ vara ett fixt tal. Vi har

$$\lim_{n\to\infty}(P(X_n = k)) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n^k} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \qquad (*)$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot 1 \cdot e^{-\lambda} \cdot 1$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{V.S.B .}$$

Förklaring av (*): Om $n \to \infty$, eftersom k är ett fixt tal, har vi i uttrycket (*)

$$\left(1-\frac{i}{n}\right) \to 1 \quad , \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda} \text{ and } \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to 1 .$$

Uppgift T4. Låt $X_1 \in Po(\lambda_1)$ och $X_2 \in Po(\lambda_2)$ vara två oberoende Poissonfördelade s.v. Visa att $Z = X_1 + X_2 \in Po(\lambda_1 + \lambda_2)$. Med andra ord: summan av Poissonfördelade stokastiska variabler är också en Poisson-fördelad s.v.

Bevis.

Vi ska visa att $P(Z = k) = p_k = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$.

$Z = X_1 + X_2 = k$ i följande fall:
$X_1 = 0$ och $X_2 = k$, $X_1 = 1$ och $X_2 = k-1$, $X_1 = 2$ och $X_2 = k-2$,…, $X_1 = k$ och $X_2 = 0$.
Därför

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k} P(X_1=i \text{ och } X_2=k-i) \qquad (X_1 \text{ och } X_2 \text{ är oberoende})$$

$$=\sum_{i=0}^{k} P(X_1=i)\cdot \mathrm{P}(X_2=k-i) \quad (*)$$

Eftersom $X_1 \in Po(\lambda_1)$ och $X_2 \in Po(\lambda_2)$ har vi från (*)

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^{\,i}}{i!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{\,k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2} = e^{-\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^{\,i}}{i!}\cdot\frac{\lambda_2^{\,k-i}}{(k-i)!} \qquad (\text{vi förlänger med } k!)$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\cdot\lambda_1^{\,i}\lambda_2^{\,k-i} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot\lambda_1^{\,i}\lambda_2^{\,k-i} \quad \text{(binomialsatsen)}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k .$$

Detta betyder att Z är en Poissonfördelning med parameter $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ (V.S.B.).