MÄNGDER

Grundläggande begrepp och beteckningar

Begreppen "**mängd**" och "**element**" är grundläggande begrepp i matematiken.

Vi kan beskriva (ange, definiera) en mängd som innehåller ändligt många element genom att ange alla element som hör till mängden.
Exempelvis, A={ 2,5,6,13}.
Med $x \in M$ betecknar vi att x **tillhör** M en given mängd,
medan $x \notin M$ betecknar "x **tillhör inte** M ".

Om A={ 2,5,6,25} då 2 tillhör mängden A som vi betecknar $2 \in A$ och läser 2 **tillhör** A (eller ibland 2 ligger i A).
Alltså gäller $2 \in A$ $5 \in A$, $6 \in A$ $25 \in A$,
medan exempelvis $3 \notin A$, $15 \notin A$, $-123 \notin A$.

Mängd och multimängd:

En **mängd** bestäms av de element som mängden innehåller.

Ordningen i vilken vi anger mängdens element, spelar inte någon roll för mängdens egenskaper.

Därför t ex
{1,2,3}={3,1,2}
(Vi ser att alla tre mängder består av elementen 1, 2 och 3. Ordning spelar inte roll i mängdens beskrivning.)

Multimängd är en generalisering av begreppet mängd. En multimängd kan (till skillnad från en mängd) innehålla ett element flera gånger. Ordningen av elementen spelar inte någon roll i en multimängd.
Exempelvis {1,1, 2,2,2, 5}= {2,1,2,1,2,5}.
(Tyvärr finns det fortfarande inte en standard, speciell betäckning för en multimängd, så att man använder samma beteckning {…} som för mängder.)

En ändlig mängd beskrivs oftast genom att ange alla mängdens element.
Exempelvis A={ a,b,c}

Ett annat sätt att beskriva en mängd är att börja med en redan känd mängd G och välja de element x som ligger i G och som uppfyller ett eller flera villkor.
Då använder vi oftast följande beskrivning

$$A = \{x \in G:\ P(x)\},$$

som utläses "A är mängden av alla x som tillhör G och som satisfierar villkoret $P(x)$" .

Till exempel, om vi definierar $A = \{x:$ där x är ett heltal och $15 \le x < 100\}$ då är

A={15,16,17,…, 99}.

Talmängder
Vi börjar med beteckningar av ofta förekommande talmängder s.k. **standardtalmängder**.

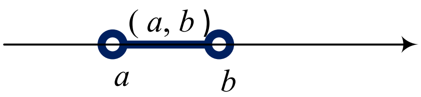
N={0, 1, 2, 3,…}, mängden av alla **naturliga tal** (I några böcker N={1,2,3,…})
Z={… –3, –2, –1,0 , 1, 2, 3 , 4, …}, mängden av alla **hela tal**
Q={ $\frac{m}{n}$; där m, n är hela tal och $n \neq 0$ }, mängden av alla **rationella tal**
R , mängden av alla **reella tal**

C ={a+bi; där a och b är reella tal och i^2=—1**},** mängden av alla **komplexa tal**

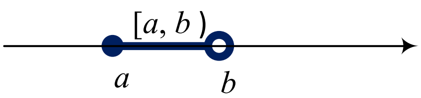
För att beteckna positiva heltal och negativa heltal använder vi $\mathbf{Z}_+$ och $\mathbf{Z}_-$.
På motsvarande sätt använder vi $\mathbf{Q}_+$ **,** $\mathbf{Q}_-$, $\mathbf{R}_+$ och $\mathbf{R}_-$.

Intervall
(I nedanstående intervall är a och b reella tal.)

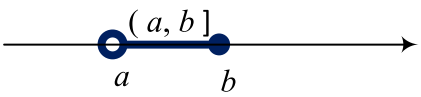
Ändliga intervall:
(*a*, *b*) öppet intervall; mängden av reella tal x sådana att $a < x < b$



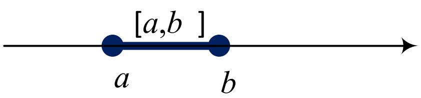
[*a*, *b*) halvöppet intervall; mängden av reella tal x sådana att $a \leq x < b$



(*a*, *b*] halvöppet intervall ; mängden av reella tal x sådana att $a < x \leq b$



[*a*, *b*] slutet intervall=; mängden av reella tal x sådana att $a \leq x \leq b$



Oändliga intervall:
$(-\infty,\infty)$ öppet intervall ; mängden av reella tal x
(a,∞) öppet intervall; mängden av reella tal x sådana att x > a

$(-\infty, b)$ öppet intervall ; mängden av reella tal x sådana att $x < b$
$[a, \infty)$ halvöppet intervall; mängden av reella tal x sådana att $x \geq a$
$(-\infty, b]$ halvöppet intervall ; mängden av reella tal x sådana att $x \leq b$

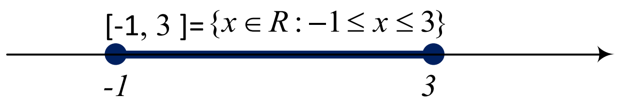
Notera att en hakparentes, [eller], inte ska stå bredvid symbolen ∞ (eftersom ∞ inte är ett reellt tal).

Anmärkning: I några böcker använder man följande intervallbeteckningar
]a,b[, [a,b[och]a,b] för
(a,b), [a,b) och (a,b].

OMGIVNING. En omgivning till talet c är varje öppet intervall som innehåller c.
Låt ε vara ett positivt tal (i tillämpningar oftast ett litet tal) och c ett reellt tal. Intervallet **$(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon)$** kallas en **$\varepsilon$-omgivning** till c.

Exempel 1.

Om vi definierar A enligt följande $A = \{x \in Z : -1 \leq x \leq 3\}$, där Z betecknar alla hela tal, då är $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.
Det är väldigt viktigt att ange grundmängden. Om vi ändrar Z till N (= naturliga tal) och behåller samma krav $-1 \leq x \leq 3$ då måste -1 exkluderas.
Alltså, om $B = \{x \in N : -1 \leq x \leq 3\}$ då är $B = \{0, 1, 2, 3\}$.
Om vi använder R (dvs alla reella tal) som grundmängden och samma villkor dvs om $M = \{x \in R : -1 \leq x \leq 3\}$ då är M ett intervall som består av alla reella tal mellan -1 och 3, som vi kortare betecknar $M = [-1, 3]$.



Antalet element i en mängd A betecknar vi med |A|. (Alternativa beteckningar är card(A) och kard(A).)
Exempelvis om A={a,b,c} då är |A|=3.
Om B={ {1,2,3}, {1,2}, {1,3},{–3,–4,–5, 8}} då är |B|=4
Notera att B är en mängd vars element också är mängder (4st).
Om en mängd M har oändligt många element skriver vi |M|= ∞.
Exempelvis om $M = \{x \in R : -1 \leq x \leq 3\}$ då är |M|= ∞.

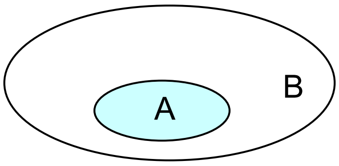
Definition 1. Mängden utan element { } kallas **den tomma mängden** och betecknas $\varnothing$.

Exempel 2.

$\{x \in R : x^2 = -1\} = \varnothing$ (Ekvationen saknar reella lösningar.)
$\{x \in N : x < -1\} = \varnothing$
$\{x \in Z : 2x = 3\} = \varnothing$ (Notera att 3/2 inte är ett heltal.)
$\{x \in Q : x^2 = 2\} = \varnothing$ (Notera att $\sqrt{2}$ inte är ett rationellt tal.)

Definition 2. Mängden A är en **delmängd** av mängden B om varje element i A också är element i B.

$A \subseteq B$ betecknar att A är en delmängd av B.



Vi kan skriva ovanstående definition på kortare sätt:

$A \subseteq B$ om ($x \in A \Rightarrow x \in B$).

Exempel 3.
Låt A=$\{1,3,5\}$ och B=$\{0,1,2,3,4,5\}$. Då är $A \subseteq B$.

Definition 3. Två mängder A och B är lika om varje element som tillhör A också tillhör B och varje element som tillhör B också tillhör A.
Alltså:
$A = B$ om och endast om ($x \in A \Rightarrow x \in B$) och ($x \in B \Rightarrow x \in A$) .
Med andra ord $A = B$ om och endast om ($x \in A \Leftrightarrow x \in B$).

Därmed $A = B$ är ekvivalent med [$A \subseteq B$ och $B \subseteq A$].

Exempel 4.
Låt A=$\{x \in N : 1 < x < 3\}$ och B=$\{x \in R : 5x = 10\}$. Då är A=B =$\{2\}$.

Definition 4. Om $A \subseteq B$ och $A \neq B$ säger vi att A är en **äkta delmängd** av B och skriver $A \subset B$

För A och B i exempel 3. har vi skrivit $A \subseteq B$. Eftersom $A \neq B$ (notera att B har minst ett element som inte tillhör A) kan vi skriva mer precis $A \subset B$.

Exempel 5.
För standardtalmängderna $N, \ldots, C$ gäller följande
$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

Uppgift 1.
Låt Z beteckna mängden av alla heltal. Ange alla element som tillhör följande mängder
a) $A = \{x \in Z : \quad -2 \leq x \leq 4\}$ b) $B = \{x \in Z : \quad x^2 = 25\}$
c) $C = \{x \in Z : \quad x^2 = -25\}$ d) $D = \{x \in Z : \quad 2x = 3\}$

Svar: a) A=$\{-2, -1, 0 , 1, 2, 3, 4\}$ b) B=$\{-5, 5\}$ c) C= Ø d) D= Ø

Uppgift 2.

Låt R beteckna mängden av alla reella tal. Ange alla element som tillhör följande mängder

a) $A=\{x \in R: \quad x^2=5\}$ b) $B=\{x \in R: \quad 2x=3\}$ c) $C=\{x \in R: \quad x^2=-5\}$

Svar: a) A={$-\sqrt{5}, \sqrt{5}$ } b) B={3/2} c) C= Ø

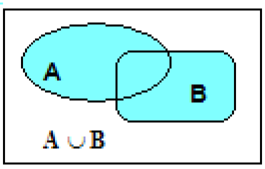
Mängdoperationer

1.

Unionen mellan två mängder A och B är mängden av alla element som finns i minst en av mängderna A, B. Unionen betecknas $A \cup B$ (utläses A union B).

Alltså,

$A \cup B=\{x: x \in A \text{ eller } x \in B\}$



Exempel 6.

Om A = { 1, 2, 3, 4} och B ={ 3, 4, 5,6} då är $A \cup B=$ { 1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Exempel 7.

Låt $A \subseteq B$.

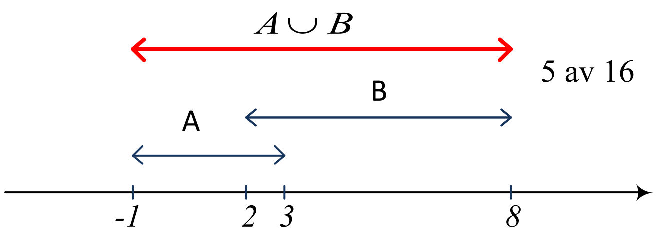
Då är $A \cup B=B$.

Uppgift 3.

Låt $A=\{x \in R:-1 \leq x \leq 3\}$ och $B=\{x \in R: 2 \leq x<8\}$. Bestäm $A \cup B$.

(Tips: Rita A och B på x-axeln.)

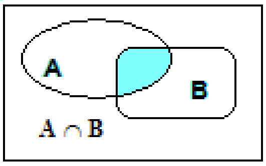
Lösning: Notera att A och B är två intervall. Vi ritar A och B på ett reell axel (t ex på x-axeln):



Från ovanstående graf ser vi att $A \cup B = \{x \in R : -1 \le x < 8\}$. Notera att 8 tillhör varken A eller B.

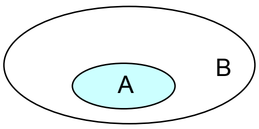
Svar: $A \cup B = \{x \in R : -1 \le x < 8\}$

2.
Snittet (skärningen**)** av två mängder A och B är mängden av alla element som finns i **både** A och B. Snittet betecknas $A \cap B$ (utläses A snitt B).
$A \cap B = \{x : x \in A \text{ och } x \in B\}$



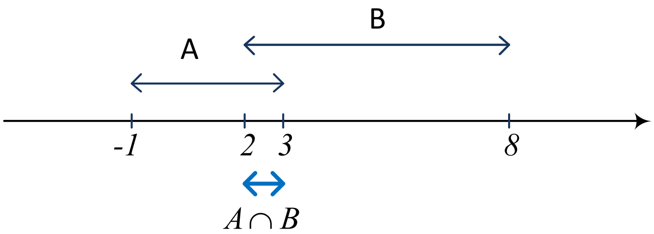
Exempel 8. A = { 1, 2, 3, 4} och B ={ 3, 4, 5,6} då är
$A \cap B$= { 3, 4}.

Exempel 9.
Låt $A \subseteq B$.
Då är $A \cap B = A$.



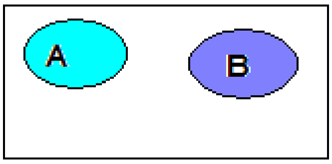
Uppgift 4.
Låt $A = \{x \in R : -1 \le x \le 3\}$ och $B = \{x \in R : 2 \le x < 8\}$. Bestäm $A \cap B$.
(Tips: Rita A och B på x-axeln.)

Lösning: Med hjälp av nedanstående graf har vi $A \cap B = \{x \in R : 2 \le x \le 3\}$.



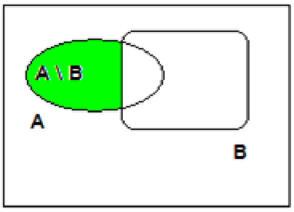
Svar: $A \cap B = \{x \in R : 2 \le x \le 3\}$

3.
A och B är **disjunkta** mängder om de **inte** har gemensamma element
dvs om $A \cap B = \emptyset$.

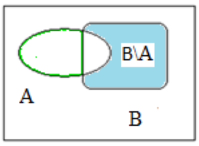


Exempel 10.
A = { 1, 2, 3} och B ={ 8,9. 10} då är
$A \cap B = \{\ \} = \emptyset$ d v s A och B är disjunkta mängder.

4.
Differensen mellan två mängder A och B är mängden av alla element som ligger i A men inte i B
A \ B $= \{x : x \in A \text{ och } x \notin B\}$.



Anmärkning: Ordningen i differensen är viktig. Enligt samma definition är
B \ A $= \{x : x \in B \text{ och } x \notin A\}$.



Exempel 11.
Om A = { 1, 2, 3, 4} och B ={ 3, 4, 5,6} då är
A \ B= { 1,2} samt B \ A= {5, 6}.

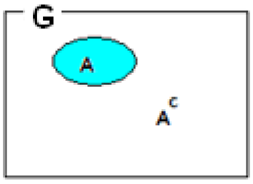
Uppgift 5.
Låt $A = \{x \in R : 1 \le x \le 4\}$ och $B = \{x \in R : 2 \le x \le 6\}$. Bestäm A \ B och B\A.

(Tips: Rita A och B på x-axeln.)

Svar: A \ B $= \{x \in R : 1 \le x < 2\}$ (Notera att 2 ligger i B och därmed kan inte ligga i A\B.)

B \ A $= \{x \in R : 4 < x \le 6\}$ (Notera att 4 ligger i A och därmed kan inte ligga i B\A.)

5.
Komplement. Oftast betraktar vi mängdoperationer mellan delmängder till en känd mängd som vi kallar **grundmängd** (eller universell mängd).
Om G är en grundmängd och A en delmängd till G då definieras **komplementet** till A som mängden av alla element i G som **inte ligger i** A. Komplementet betecknas A^C
$A^C = \{x \in G : x \notin A\}$ (Betecknas även ***C*(A)** och $\overline{A}$)

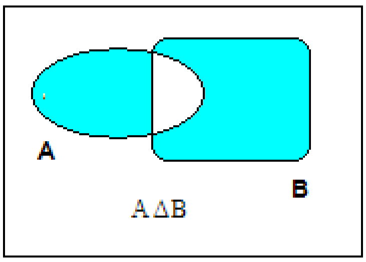


Exempel 12.
Om grundmängden är mängden av alla reella tal och
A=$\{x \in R : x \le 5\} = (-\infty, 5]$
då är $A^C = \{x \in R : x > 5\} = (5, +\infty)$

Uppgift 6.
Låt A=$\{x \in R : 1 < x \le 5\} = (1,5]$. Bestäm komplementet A^C.

Svar: $A^C = \{x \in R : x \le 1 \text{ eller } x > 5\} = (-\infty, 1] \cup (5, \infty)$.
Notera att ändpunkten 1 tillhör komplementet eftersom 1 inte ligger i A. Ändpunkten 5 ligger inte i A^C eftersom den ligger i A.

6.



Symmetrisk differens.
$A \,\Delta\, B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

Exempel 13.
Om A = { 1, 2, 3, 4} och B ={ 3, 4, 5,6} då är

A Δ B= (A \ B) $\cup$ (B \ A) = { 1,2,5,6}.

Uppgift 7.

Låt A= {1,2,3,4} och B = {2,4,8} .
Bestäm $A \cup B$, $A \cap B$, A \ B , B \ A och $A\,\Delta\,B$.

Svar:

$A \cup B = \{1,2,3,4,8\}$

$A \cap B = \{2,4\}$

A \ B = {1,3}

B \ A= {8}

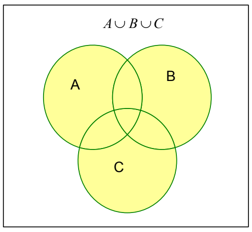
$A \Delta B = \{1,3,8\}$

7.
Unionen av flera mängder.

Man kan enkelt visa att $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ dvs att vi får samma resultat för unionen av A, B och C oavsett i vilken ordning utförs union-operationer. Därför kan vi skriva union av tre mängder utan parenteser $A \cup B \cup C$. Alltså

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

Mängden $A \cup B \cup C$ består av de element som ligger i **minst en** av mängderna A, B , C.

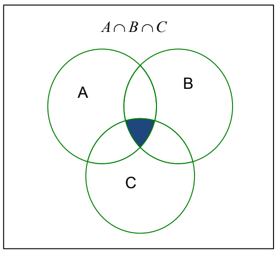


På samma sätt $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ består av de element som ligger i **minst en** av mängderna $A_1, A_2, \cdots A_n$. Vi betecknar kortare en sådan union som $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Alltså

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

8.
Snittet av flera mängder.

Eftersom $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, som enkelt bevisas med logiskt resonemang, kan vi skriva snittet av tre (eller flera) mängder utan parenteser, $A \cap B \cap C$. Alltså
$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.



Snittet av mängderna $A_1, A_2, \cdots A_n$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

består av de element som **tillhör alla** de givna mängderna.

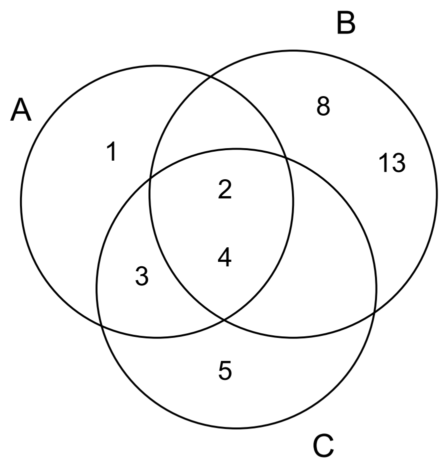
Uppgift 8.

Låt grundmängden i denna uppgift vara mängden av alla naturliga tal N.
Låt A= {1,2,3,4}, B = {2,4,8,13} och C={ 2,3,4,5}.
i) Bestäm a) $A\cup B\cup C$ b) $A\cap B\cap C$ c) $A\cap B^C\cap C^C$ d) $A\cap B^C\cap C$
ii) Rita Venndiagram (=mängddiagram) med tillhörande element i varje del.

Svar:
i)
a) $A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,8,13\}$ b) $A\cap B\cap C=\{2,4\}$
c) Mängden $A\cap B^C\cap C^C$ består av de element som (ligger i A) och (ligger inte i B) och (ligger inte i C). Alltså
$A\cap B^C\cap C^C=\{1\}$

d) $A\cap B^C\cap C$ består av de element som (ligger i A) och (ligger inte i B) och (ligger i C).
Därför $A\cap B^C\cap C=\{3\}$

ii)



9.
Komplementet av unionen och snittet.
De Morgans lagar (regler) inom mängdläran

m₁) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

m₂) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Allmänt fall:

m₃) $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^C = A_1^{\ C} \cap A_2^{\ C} \cap \cdots \cap A_n^{\ C}$

m₄) $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)^C = A_1^{\ C} \cup A_2^{\ C} \cup \cdots \cup A_n^{\ C}$

Exempel 14. Tillämpa de Morgans lagar på uttrycket $(M \cup N^C \cup P^C \cup R)^C$.
Tips: $(A^C)^C = A$.

Lösning: Enligt de Morgans lagar gäller
$(M \cup N^C \cup P^C \cup R)^C$
$= M^C \cap (N^C)^C \cap (P^C)^C \cap R^C$ (eftersom $(N^C)^C = N$ och $(P^C)^C = P$)
$= M^C \cap N \cap P \cap R^C$
Svar: $M^C \cap N \cap P \cap R^C$

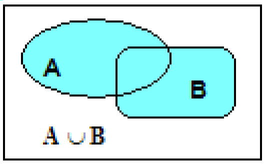
Bevis för formel m₁: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
Vi visar att mängderna $(A \cup B)^C$ och $A^C \cap B^C$ innehåller samma element dvs att
$x \in (A \cup B)^C$ om och endast om $x \in A^C \cap B^C$.
Vi har
$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A$ och $x \notin B$
$\Leftrightarrow$ $x \in A^C$ och $x \in B^C \Leftrightarrow$ $x \in A^C \cap B^C$ V. S. B.
Alltså har vi visat att $x \in (A \cup B)^C$ om och endast om $x \in A^C \cap B^C$ som betyder att
$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ V.S.B.

10.
Antalet element i en ändlig mängd A betecknar vi med $|A|$.
Inom sannolikhetslära och kombinatorik behöver vi oftast beräkna antalet element i en union.
Om E och F är två **ändliga och disjunkta** $(E \cap F = \emptyset)$ mängder

då kan vi enkelt beräkna antalet element i unionen som $|E \cup F| = |E| + |F|$.
I allmänt fall använder vi följande formel för **antalet element i unionen**

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Förklaring:



När vi beräknar summan $|A|+|B|$ kommer vi att räkna alla element som ligger i A plus alla element som ligger i B. De som ligger i snittet räknas på detta sätt två gånger. För att kompensera detta subtraherar vi $|A\cap B|$.
Alternativa formler för antalet element i unionen får vi genom att dela unionen i disjunkta delmängder . Från $A\cup B=(A\setminus \mathrm{B})\cup(A\cap B)\cup(B\setminus \mathrm{A})$ där $(A\setminus \mathrm{B})$, $(A\cap B)$ och $(B\setminus \mathrm{A})$ är disjunkta mängder (rita Venndiagram).
Därför
$|A\cup B|=|A\setminus \mathrm{B}|+|A\cap B|+|B\setminus \mathrm{A}|$
På liknande sätt har vi följande ekvivalenta formler
$|A\cup B|=|A|+|B\setminus \mathrm{A}|$
$|A\cup B|=|B|+|A\setminus \mathrm{B}|$

Exempel 15.
Vi vet att mängden A har 100 element , mängden B har 60 element och att de två mängder har 40 gemensamma element. Hur många element finns i $A\cup B$.
Lösning: $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$=100+60–40=120
Svar: 120

Exempel 16.
Låt A= {a,b,c,d,e} och B={c,d,e,f,g}. Då är
$A\cup B$ = {a,b,c,d,e,f,g} och därmed $|A\cup B|$=7.
Det är enkelt att kontrollera att *alla* ovanstående formler ger samma resultat.

Anmärkning:
För antalet element i unionen av tre mängder har vi följande formel:
$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$
Denna formel kan generaliseras så att den gäller för n mängder.

11.
Potensmängden

Definition 5. Potensmängden (eng. power set) till en mängd A är mängden av alla delmängder till A inklusive den tomma mängden och mängden A själv.
Potensmängden till A betecknas $\mathcal{P}$(A) .
Om mängden A har *n* element då har $\mathcal{P}$(A) 2^n element (vi upprepar att element i $\mathcal{P}$(A) är delmängder i A) .

Exempel 17.
Bestäm potensmängden till A={a,b,c}. Hur många element har $\mathcal{P}$(A) ?
Tips: glöm inte den tomma mängden och mängden A själv .

Lösning.
Vi anger alla delmängder till A inklusive Ø och hela A={a,b,c} .
𝒫(A):s element är:
Ø, (den tomma mängden)
{a}, {b}, {c}, (delmängder till A som har 1 element)
{a,b},{a,c} , {b,c} (delmängder till A som har 2 element)
{a,b,c} (delmängden till A som har 3 element, dvs mängden A själv)

Vi samlar alla delmängder inom mängdparenteser. Alltså är
𝒫(A) ={Ø, {a}, {b}, {c}, {a,b},{a,c}, {b,c},{a,b,c}} .
𝒫(A) har 8 element (alltså lika med 2^3) .

12.
Räknelagar för mängdoperationer (de flesta av nedanstående formler har vi diskuterat ovan)
I nedanstående formler betraktar vi mängder som ligger i en grundmängd G .

F1) $A \cap B = B \cap A$ kommutativitet
F2) $A \cup B = B \cup A$

F3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ associativitet
F4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

F5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ distributivitet
F6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

F7) $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^C = A_1^C \cap A_2^C \cap \cdots \cap A_n^C$ de Morgans lagar
F8) $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)^C = A_1^C \cup A_2^C \cup \cdots \cup A_n^C$

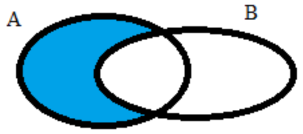
F9) $A \setminus B = A \cap B^C$
F10) $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C)$
F11) $(A^C)^C = A$
F12) $A \cup \varnothing = A$
F13) $A \cap \varnothing = \varnothing$
F14) $A \cup A = A$
F15) $A \cap A = A$

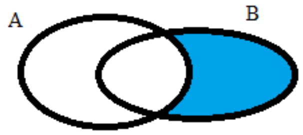
Vi bevisar formel F5 dvs formeln $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. För att göra detta visar vi att ett element x ligger i $A \cup (B \cap C)$ om och endast om x ligger i $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Vi har
$x \in A \cup (B \cap C)$
$\Leftrightarrow x \in A$ eller $x \in (B \cap C)$

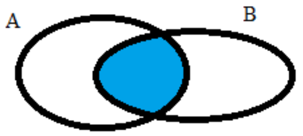
$\Leftrightarrow x \in A$ eller $\{x \in B$ och $x \in C\}$
$\Leftrightarrow \{x \in A$ eller $x \in B\}$ och $\{x \in A$ eller $x \in C\}$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ och $x \in (A \cup C)$
$\Leftrightarrow x \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))$
Därmed har vi bevisat att $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

BLANDADE ÖVNINGAR

Uppgift 9. Beskriv med mängdoperationer de mängder i nedanstående grafer som är markerade med blå färg.

a) 

b) 

c) 

Svar: a) $A \setminus B$ (alternativt svar $A \cap B^C$)
b) $B \setminus A$ (alternativt $A^C \cap B$)
c) $A \cap B$

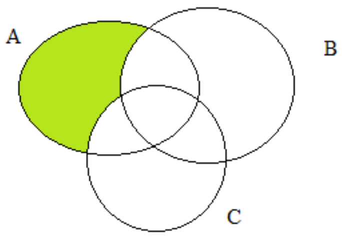
Uppgift 10.
Använd mängdoperationer för att beskriva en mängd som består av **alla** element x sådana att

a) x ligger i A men inte i B
b) x ligger i B men inte i A
c) x ligger i både A och B (dvs x ligger i A och x ligger i B)
d) x ligger i minst en av A, B.
e) x ligger i varken A eller B
f) x ligger i exakt en av A och B

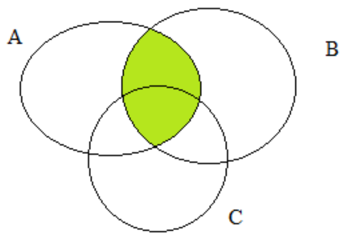
Svar:

a) $A \cap B^C$ (alternativt svar $A \setminus B$)
b) $A^C \cap B$ (alt. $B \setminus A$)
c) $A \cap B$
d) $A \cup B$
e) $A^C \cap B^C$
f) $(A^C \cap B) \cup (A \cap B^C)$

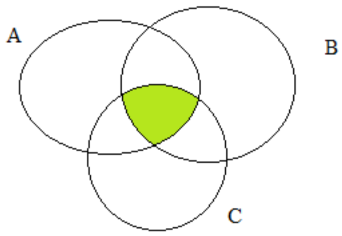
Uppgift 11. Beskriv med mängdoperationer de mängder i nedanstående grafer som är markerade med grön färg.



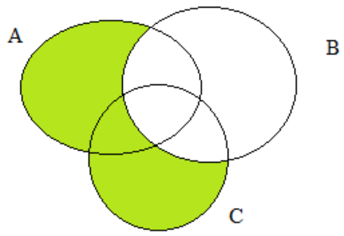
a)



b)



c)



d)

Svar: a) $A \cap B^C \cap C^C$ b) $A \cap B$
c) $A \cap B \cap C$ d) $(A \cup C) \cap B^C$

Uppgift 12

Vi betraktar tre mängder A, B och C (som ligger i en grundmängd G). Använd mängdoperationer för att beskriva en mängd som består av **alla** element x sådana att

a) x ligger i A och B men inte i C
b) x ligger varken i A eller C men x ligger i B
{ dvs (x ligger inte i A) och (x ligger inte i C) och (x ligger i B)}
c) x ligger i alla tre mängder (dvs x ligger i A och x ligger i B och x ligger i C)
d) x ligger i minst en av A, B, C.
e) x ligger inte i någon av A, B eller C.
f) x ligger i exakt en av A, B, C.
g) x ligger i exakt två av A , B, C.

Svar:

a) $A \cap B \cap C^C$ b) $A^C \cap B \cap C^C$ c) $A \cap B \cap C$

d) $A \cup B \cup C$ e) $A^C \cap B^C \cap C^C$

f) $(A^C \cap B^C \cap C) \cup (A^C \cap B \cap C^C) \cup (A \cap B^C \cap C^C)$

g) $(A^C \cap B \cap C) \cup (A \cap B^C \cap C) \cup (A \cap B \cap C^C)$