M/M/m/K kösystem

Allmänt om KÖSYSTEM (=betjäningssystem).

För att definiera ett kösystem måste vi ange ankomstprocessen (dvs hur kunder ankommer till systemet) och betjäningsprocess (dvs hur lång tid det tar att betjäna dem).
Vi inför följande beteckning för att karakterisera ett kösystem

A/B/C/D

där
A står för ankomstintervallens fördelning
B står för betjäningstidsfördelningen
C står för antalet betjänare
D står för antalet köplatser.

A och B kan t ex väljas bland följande beteckningar:
M (=Markov) om vi har exponentialfördelning
G (=General) om fördelningen inte är specificerad
D (=Deterministisk) om tiderna är konstanta.

Exempelvis M/M/3/5 betecknar ett kösystem där
i) Ankomsttiderna är exponentialfördelade (Markovprocess)
ii) Betjäningstiderna är exponentialfördelade (Markovprocess)
iii) Kösystemet har 3 betjänare
iv) Kösystemet har 5 köplatser.

M/M/m/K kösystem

Ett M/M/m/K betjäningssystem har följande egenskaper:

1. Systemet har ***m*** **betjänare av samma typ.**

2. Betjäningstiderna för kunder i en betjänare är exponentialfördelade med medelvärde $\bar{x} = \frac{1}{\mu}$. Systemet betjänar kunder med intensiteten μ om en betjänare jobbar, med intensiteten 2μ om 2 betjänare jobbar, med intensiteten 3μ om 3 betjänare jobbar o.s.v.

3. Kunder ankommer enligt Poissonprocess med ankomstintensiteten λ kunder per tidsenhet. (Därmed är ankomsttiderna exponentialfördelade)

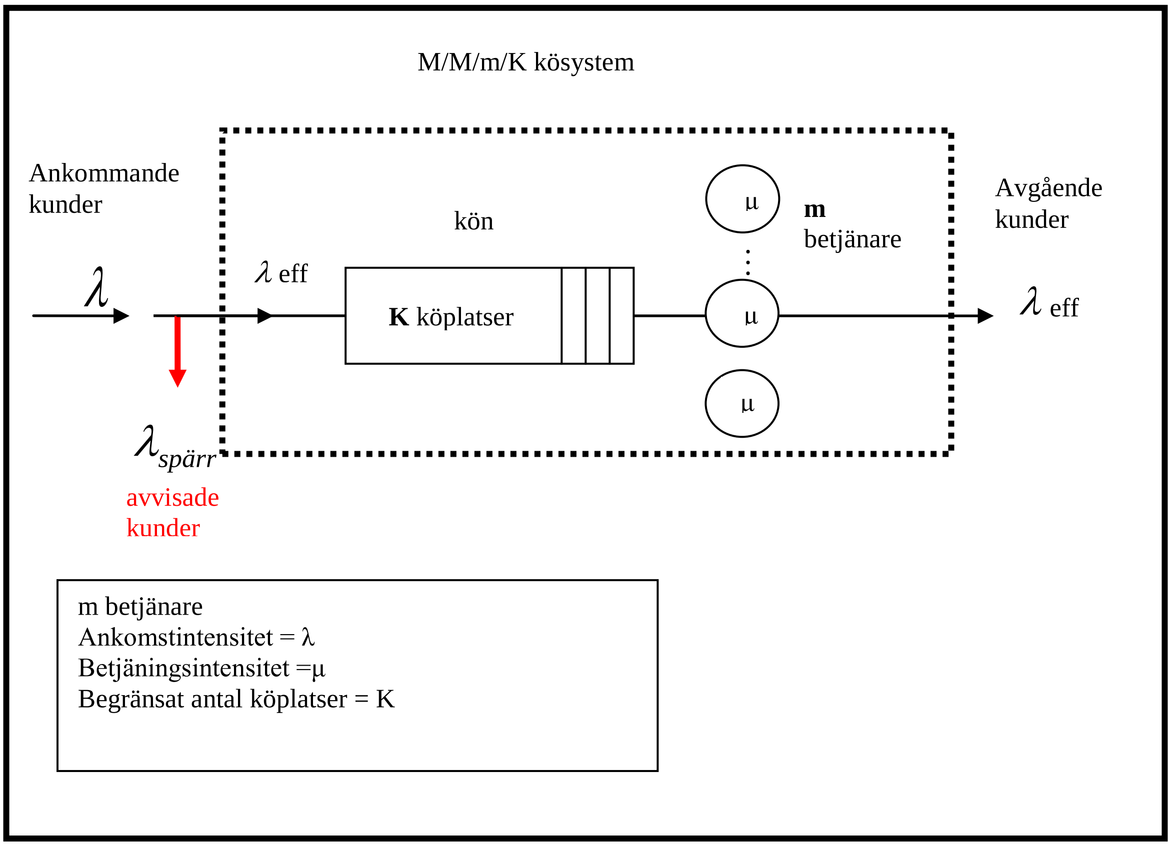
4. Kösystemet har begränsat antal köplatser (=K)

Systemet M/M/m/K kan modelleras som en födelsedödsprocess med tillstånd

$0, 1, 2... k_{max}$

där
k_{max}= (total antal platser i systemet =antalet betjänare + antalet köplatser betjänare) =m+K
dvs

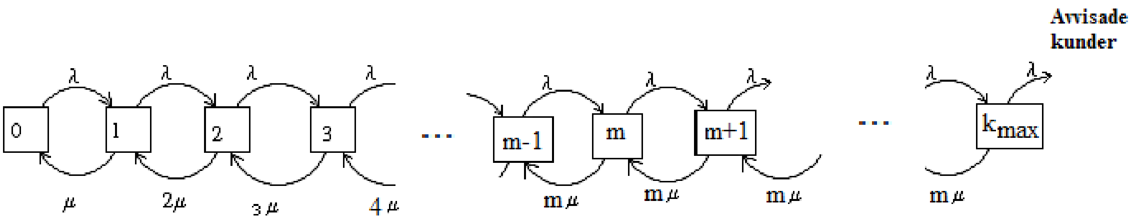
$$k_{max} = m+K.$$



Det största antalet kunder som kan finnas i kösystemet M/M/m/K är

$$k_{max} = m+K$$

Låt Z(t) beteckna antalet kunder i systemet vid tiden t.
Z(t) kan anta värden 0,1, 2, 3, ... k_{max}.
Vi betraktar Z(t) som en födelsedödsprocess. Låt p_k beteckna sannolikheten för k kunder i systemet. För att bestämma stationära sannolikheter använder vi beräkningsmodellen med födelsedödsprocess.



Beteckningar:

p_k	Stationära sannolikheter; p_k är sannolikheten för k kunder i systemet
N	Medelantal kunder i systemet, $N = N_q + N_s$
N_q	Medelantal kunder i kön
N_s	Medelantal kunder i betjänarna
$\tilde{x}$	Betjäningstid för en kund (stokastisk variabel)
$\bar{x}$	Medel betjäningstid för en kund, $\bar{x} = E(\tilde{x})$
$\tilde{w}$	Väntetid (=tid i kö) för en kund (stokastisk variabel)
W	Medel väntetid för en kund, $W = E(\tilde{w})$
$\tilde{s}$	Total tid i systemet för en kund; $\tilde{s} = \tilde{x} + \tilde{w}$
T	Medel totaltid i systemet för en kund $T = E(\tilde{s})$, $T = W + \bar{x}$
λ	Ankomstintensitet
$\lambda_{spärr}$	Spärrade kunder per tidsenhet
λ_{eff}	Effektiv ankomstintensitet $\lambda_{eff} = \lambda - \lambda_{spärr}$
μ	Betjäningsintensitet
ρ	Erbjuden trafik , $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Några formler för ett M/M/m/K kösystem:

$$N = \sum_k k \cdot p_k$$

$$\lambda_{spärr} = \lambda \cdot p_{k_{\max}}$$

$$\lambda_{eff} = \lambda - \lambda_{spärr}$$

$$T = \frac{N}{\lambda_{eff}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\mu}$$

$$T = W + \bar{x}$$

Littles formler:

$$N = \lambda_{eff} \cdot T$$

$$N_q = \lambda_{eff} \cdot W$$

$$N_s = \lambda_{eff} \cdot \bar{x}$$

$N = N_q + N_s$

$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, erbjuden trafik (kallas också "betjäningsfaktor")

$\rho_{spärr} = \dfrac{\lambda_{spärr}}{\mu}$, spärrad trafik

$\rho_{eff} = \dfrac{\lambda_{eff}}{\mu}$, effektiv trafik

Belastning per betjänare = $\dfrac{N_s}{m}$.

==

ÖVNINGSUPPGIFTER

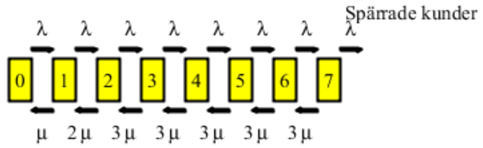
Uppgift 1. Ett system kan modelleras som M/M/3/4 **.** Ankomstintensiteten är 40 kunder/minut och betjäningsintensiteten för en betjänare är μ =30 kunder/minut.

a) Skissera tillståndsgraf
b) Bestäm sannolikheterna p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, och p_7,

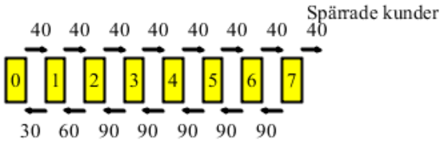
Beräkna
c) N = medelantal kunder i systemet,
d) $\lambda_{spärr}$ = spärrad ankomstintensitet, och λ_{eff} = effektiv ankomstintensitet
e) $\bar{x}$ =medel betjäningstid för en kund, T =medel totaltid i systemet för en kund och W=medel väntetid för en kund
f) Nq =medelantal kunder i kön och Ns =medelantal kunder i betjänarna
g) erbjuden. avverkad och spärrad trafik.

Lösning:
a) För att rita tillståndsgraf tar vi hänsyn till följande:
i) Totalantal platser i systemet är
kmax=(antalet betjänare)+(antalet köplatser)=m+k=3+4=7

ii) Ankomstintensitet är konstant λ =40 kunder per minut.
ii) Betjäningsintensiteten för en betjänare är μ =30 kunder/minut.
Om två betjänare jobbar samtidigt (det händer när vi har exakt två kunder i systemet) då är systemets betjäningsintensitet =2 μ =60 kunder/minut.
Om vi har 3 eller flera kunder i systemet så jobbar alla tre betjänare och därmed blir systemets betjäningsintensitet =3 μ =90 kunder/minut.
Därför har vi följande tillståndsgraf



eller



b)
Med hjälp av teorin för födelsedödsprocesser har vi följande relationer mellan de stationära sannolikheterna p_k och p_0:

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 ,$$

$$p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0 ,$$

$$p_3 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} p_0$$

….

$$p_7 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_6}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \cdots \mu_7} p_0$$

Vi har $p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = \frac{40}{30} p_0 = \frac{4}{3} p_0 = 1.3333333 p_0$,

$$p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0 = \frac{40 \cdot 40}{30 \cdot 60} p_0 = \frac{8}{9} p_0 = 0.8888889 p_0$$

på liknande sätt $p_3 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} p_0 = 0.395062 p_0$,

$$p_4 = 0.1755829904 p_0 ,$$

$$p_5 = 0.07803688462 p_0$$

$$p_6 = 0.03468305983 p_0$$

$$p_7 = 0.01541469326 p_0$$

För att bestämma p_0 substituerar vi ovanstående relationer i ekvationen
$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \cdots p_7 = 1$ och får
$3.921001579 p_0 = 1$ $\Rightarrow$ p_0 =0.2550368777.
Nu är det enkelt att beräkna alla andra stationära sannolikheter. Vi helt enkelt substituerar p_0 =0.2550368777 i ovanstående relationer och får:
$p_1 = 0.3400491702$, $p_2 = 0.2266994468$, $p_3 = 0.1007553097$,
p_4 =0.04478013764,
$p_5 =$ 0.01990228340 p_6 =0.008845459288, p_7 =0.003931315239

c) Medelantal kunder i systemet, N= E(Z), bestämmer vi med hjälp av den allmänna formeln för medelvärdet av en diskret stokastisk variabel:
N= E(Z) = $\sum_k z_k \cdot p_k$
$= 0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 = 1.454937924$

d) Medelantal kunder per minut som avvisas från systemet är
$\lambda_{spärr} = \lambda \cdot p_{k_{\max}}$ =0.15725261 kunder/min
Medelantal kunder per minut som passerar systemet är
$\lambda_{eff} = \lambda - \lambda_{spärr}$ =39.84274740 kunder/min

e) $\bar{x}$ =medel betjäningstid för en kund, W=medel väntetid för en kund. T =medel totaltid i systemet för en kund och

Från Littles formel $N = \lambda_{eff} \cdot T$ har vi
$T = \dfrac{N}{\lambda_{eff}}$ = 0.03651700796 min (för en kund)
$\bar{x} = \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{30}$ =0.03333333333 min (för en kund)
$T = W + \bar{x} \Rightarrow W = T - \bar{x} = 0.00318367463$ min (för en kund)

f) Nq =medelantal kunder i kön och Ns =medelantal kunder i betjänarna

Metod 1, Littles formler:
$N_q = \lambda_{eff} \cdot W$ =0.1268463441
$N_s = \lambda_{eff} \cdot \bar{x}$ =1.328091580

Metod 2, Direkt beräkning (Medelvärdet av en diskret stokastisk variabel):
Låt q_j beteckna antalet kunder i kön. Då är Nq= $\sum_k q_j \cdot p_j$ .En kund hamnar i kön om alla betjänarna är upptagna (och dessutom finns en ledig köplats). Exempelvis, om vår system(med 3 betjänare och 4 köplatser) är i tillstånd 5 så är tre kunder i betjänarna och 2 i kön.

I vårt fall har vi följande situation i kön:

Tillstånd:	0	1	2	3	4	5	6	7
sannolikhet	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
Antalet kunder i kön	0	0	0	0	1	2	3	4

Därför är

Nq= $0p_0 + 0p_1 + 0p_2 + 0p_3 + 1p_4 + 2p_5 + 3p_6 + 4p_7 = 0.1268463441$

För antalet kunder i betjänarna har vi följande situation:

Tillstånd:	0	1	2	3	4	5	6	7
sannolikhet	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
Antalet kunder i betjänarna	0	1	2	3	3	3	3	3

Därför är

Ns= $0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 3p_4 + 3p_5 + 3p_6 + 3p_7 = 1.328091580$

g) erbjuden, avverkad och spärrad trafik.

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{3}$ = 1.33333333, erbjuden trafik (kallas också "betjäningsfaktor")

$\rho_{spärr} = \frac{\lambda_{spärr}}{\mu}$ = 0.005241754, spärrad trafik

$\rho_{eff} = \frac{\lambda_{eff}}{\mu}$ = 1.328091580, avverkad trafik (eller effektiv trafik)

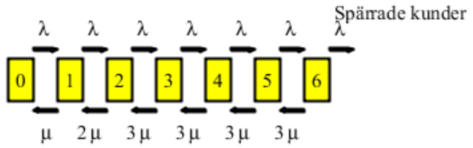
Tillstånd:	0	1	2	3	4	5	6	7
sannolikhet	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
Antalet kunder i betjänarna	0	1	2	3	3	3	3	3

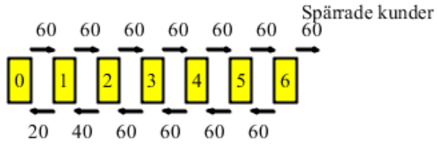
Uppgift 2. Ett system kan modelleras som M/M/3/3 väntsystem **.** Ankomstintensiteten är 60 kunder/minut och betjäningsintensiteten är μ =20 kunder/minut.

a) Skissera tillståndsgraf

b) Beräkna spärrad trafik och avverkad trafik.

Svar a)





b) Först $p_1 = 3p_0$, $p_2 = 4.5p_0$, $p_3 = 4.5p_0$ $p_4 = 4.5p_0$, $p_5 = 4.5p_0$, $p_6 = 4.5p_0$

Substitutionen i $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_6 = 1$

ger $p_0 := 0.03773584906$ och därmed

$p_1 := 0.1132075472$ $p_2 := 0.1698113208$ $p_3 := 0.1698113208$ $p_4 := 0.1698113208$

$p_5 := 0.1698113208$ $p_6 := 0.1698113208$

$\lambda_{spärr} = \lambda \cdot p_{k_{\max}}$ =10.18867925

$\lambda_{eff} = \lambda - \lambda_{spärr}$ =49.81132078

Nu kan vi beräkna spärrad och avverkad trafik (=effektiv trafik):

spärrad trafik= $\rho_{spärr} = \dfrac{\lambda_{spärr}}{\mu} = 0.509434$

avverkad trafik (=effektiv trafik) = $\rho_{eff} = \dfrac{\lambda_{eff}}{\mu}$ = 2.49057.

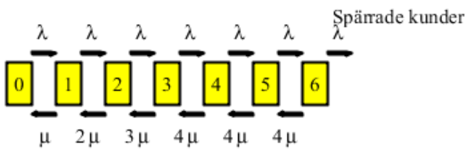
Uppgift 3. Ett system kan modelleras som M/M/4/2 väntsystem **.** Ankomstintensiteten är 50 kunder/sekund och betjäningsintensiteten är μ =10 kunder/sekund.

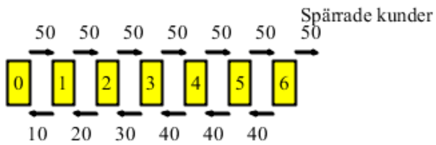
a) Skissera tillståndsgraf

b) Beräkna avverkad trafik, spärrad trafik och anropsspärr (sannolikheten att en kund avvisas)

Svar:

a)





b)

Sannolikheterna:

$p_0 := 0.007214112608$ $p_1 := 0.03607056304$ $p_2 := 0.09017640760$ $p_3 := 0.1502940127$

$p_4 := 0.1878675158$ $p_5 := 0.2348343948$ $p_6 := 0.2935429935$

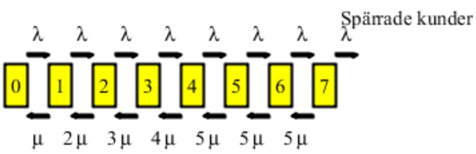
$\lambda_{spärr} = \lambda \cdot p_{k_{\max}}$ =14.67714968

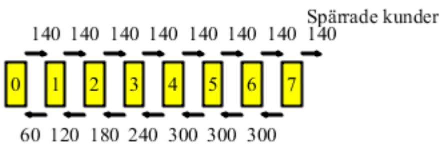
$\lambda_{eff} = \lambda - \lambda_{spärr}$ =35.32285033

erbjuden trafik= 5.
avverkad trafik= 3.53229
spärrad trafik= 1.46771

En kund avvisas om den kommer då alla platser i systemet är upptagna,
i vårt system är därmed anropsspärr$=p_{kmax}= 0.293543$
anropsspärr=0.293543

Uppgift 4. Ett system kan modelleras som M/M/5/2 väntsystem **.** Ankomstintensiteten är 140 kunder/minut och medel betjäningstid är $\bar{x}$ =1 sekund.
Beräkna N, N_{q}, N_{s} och belastning per betjänare.
Svar:
Från $\bar{x}$ =1 sekund per kund får vi att betjäningsintensitet $\mu = \frac{1}{\bar{x}} = 1$ kund per sekund eller 60 kunder per minut.





Sannolikheterna:

$p_0 := 0.09635036393$ $p_1 := 0.2248175158$ $p_2 := 0.2622871018$ $p_3 := 0.2040010792$

$p_4 := 0.1190006295$ $p_5 := 0.05553362711$ $p_6 := 0.02591569265$ $p_7 := 0.01209398990$

$\lambda_{spärr} = \lambda \cdot p_{k_{\max}}$ =1.6931586

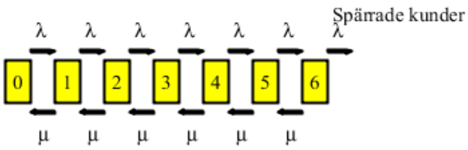
$\lambda_{eff} = \lambda - \lambda_{spärr}$ =138.3068414

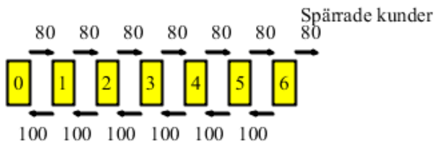
N= 2.355217696
T=N/ λ_{eff} = 0.01702893127,
$W = T - \bar{x} =$ 0.00036226460
Nq= 0.0501037
Ns= 2.30511
Belastning per betjänare = Ns/5= 0.461023

Uppgift 5. I en nod i ett datornät betraktar vi en från noden utgående transmissionskanal med tillhörande buffert (” outputkö ” till kanalen) . Vi antar att vi kan modellera detta system som M/M/1/5 med ankomstintensitet
λ = 80 meddelanden/ sekund och medelbetjäningstiden (medelöverföringstiden)
$\bar{x}$ = 0.01 sekunder.
Beräkna :
a) T, b) W, c) avverkad och d) spärrad trafik i detta system.

Svar:

Från $\bar{x}$ =0.01 sekund per meddelande får vi att betjäningsintensitet $\mu = \frac{1}{\bar{x}} = 100$ meddelanden per sekund.





$$p0 = \frac{15625}{61741} = 0.253073 \quad p1 = \frac{12500}{61741} = 0.202459 \quad p2 = \frac{10000}{61741} = 0.161967$$
$$p3 = \frac{8000}{61741} = 0.129574 \quad p4 = \frac{6400}{61741} = 0.103659 \quad p5 = \frac{5120}{61741} = 0.0829271$$
$$p6 = \frac{4096}{61741} = 0.0663417$$
$$N = \frac{132276}{61741} = 2.14243$$

$\lambda_{spärr}$ = 5.30733224

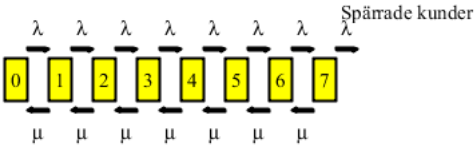
λ_{eff} = 74.69266775

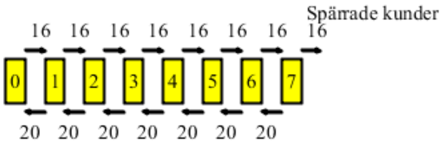
a) T= 0.0286833
b) W= 0.0186833
c) avverkad trafik= 0.746927
d) spärrad trafik= 0.0530733

Uppgift 6. I en nod i ett datornät betraktar vi en från noden utgående transmissionskanal med tillhörande buffert (” outputkö ” till kanalen) . Vi antar att vi kan modellera detta system som M/M/1/6 med ankomstintensitet
λ = 16 meddelanden/ sekund och medelbetjäningstiden (medelöverföringstiden)
$\bar{x}$ = 0.05 sekunder.
Beräkna sannolikheten att ett meddelande
a) slipper vänta i bufferten och omedelbart får betjäning
b) måste vänta men blir betjänat
c) avvisas

Svar:

Från $\bar{x}$ =0.05 sekunder per meddelande får vi att betjäningsintensitet $\mu = \frac{1}{\bar{x}} = 20$ meddelanden per sekund.





$p_0 := 0.2403188050$ $p_1 := 0.1922550440$ $p_2 := 0.1538040352$

$p_3 := 0.1230432282$ $p_4 := 0.09843458253$ $p_5 := 0.07874766602$

$p_6 := 0.06299813282$ $p_7 := 0.05039850626$

a) Sannolikheten att ett meddelande slipper vänta i bufferten och omedelbart får betjäning är
p_0=0.240319

b) Sannolikheten att ett meddelande måste vänta men blir betjänat är
$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 0.709283$

c) Sannolikheten att ett meddelande avvisas är
$p_7 = 0.0503985$