KOMBINATORIK

I kombinatoriken sysslar man huvudsakligen med beräkningar av **antalet sätt** på vilket element i en given lista kan arrangeras i dellistor.
Centrala frågor i kombinatoriken är:
" *Bestäm antalet...*"
och
" *På hur många sätt...*"

Exempel i) Låt A={1,2,3,...n}. **Bestäm antalet** delmängder till A av storleken k.

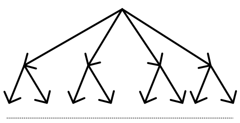
Exempel ii) I en låda finns det 10 defekta och 90 korrekta produkter. Vi väljer 5 produkter på måfå (utan hänsyn till ordning). **På hur många sätt** kan vi välja (utan hänsyn till ordning) 5 produkter bland 100?

Nedanstående sats kan enkelt bevisas med induktionsbevis.
SATS 1. Multiplikations principen. Om man i ordning ska utföra k operationer där operation nr 1 kan utföras på n_1 sätt, operation nr 2 kan utföras på n_2 sätt,..., operation nr k kan utföras på n_k sätt, så är det totala antalet sätt att, i den angivna ordningen, utföra de k operationerna lika med

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k \, .$$

(Anmärkning: Ovanstående sats kan enkelt bevisas med induktionsbevis.)

Detta kan illustreras med ett träd:



Multiplikations principen för $n_1 = 4$ och $\cdot n_2 = 2$. Det totala antalet sätt att i den angivna ordningen utföra de 2 operationerna är $n_1 \cdot n_2 = 4 \cdot 2 = 8$.

===

PERMUTATIONER (Ordnade listor med n element, så kallade n- tipplar)

A (permutationer av n olika element) Vi betraktar ordnade listor med n olika element $\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ **.** Varje bestämd ordning av givna element kallas en permutation.
Antalet permutationer av **n** olika element (där varje element förekommer exakt en gång) betecknas med **P(n)** och beräknas enligt följande

$$P(n) \;= n(n-1)(n-2)\cdots\; 2\cdot 1$$

(För första platsen väljer vi bland n element. För andra platsen väljer vi bland (n-1) o s v.)

Uttrycket $n(n-1)(n-2)\cdots\; 2\cdot 1$ betecknas kortare **n!** (utläses ”en fakultet”)

Alltså

$$P(n) = n!$$

Alltså
1!=1
2!=2,
3! =3·2·1=6,
4!=4· 3·2·1=24
5!= 5·4· 3·2·1=120
6!= 6·5·4· 3·2·1=720
….
Som vi ser, gäller även n!=n·(n-1)!
Anmärkning: **0!** $\stackrel{\text{def}}{=}$ **1** (Av praktiska skäl definieras 0!=1)

Uppgift 1. a) Hur många permutationer (dvs olika ”ord”) kan vi skriva med bokstäver A, B, C och D där varje bokstav används exakt en gång?
b) Ange alla permutationer

Lösning:
a) Antalet permutationer =$P(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
b) Alla (24) permutationer :
ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB
BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA,
CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA,
DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA.

B) Antalet permutationer av n element där n_1 är av samma typ1, n_2 är av samma typ2, **…** och $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, beräknas enligt följande

$$P_{n_1,\ n_2,\dots,n_k}(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

Uppgift 2. a) Hur många permutationer kan vi skriva med bokstäver A, A, B , B och B där A förekommer 2 gånger och B 3 gånger?
b) Ange alla sådana permutationer.

Lösning till a delen:

$$P = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)} = 10$$

Uppgift 3.
Hur många permutationer av bokstäverna i ordet KOMBINATORIK börjar till vänster med KOMB ?
Lösning:
Om bokstäverna KOMB finns i början av ordet, då permuterar vi faktiskt de bokstäver som finns i INATORIK
(Anm I förekommer 2 gånger i ordet) . Därför

$$P = \frac{8!}{2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 20160$$

DRAGNING MED HÄNSYN TILL ORDNING

VARIATIONER. Ordnade k- tipplar valda bland n element (Ordnade dellistor med k element valda bland n-element, kallas också permutationer av k element bland n, delpermutationer, varianter, …)

i) Antalet variationer med k element valda, **utan upprepning**, bland n element är

$$V_k(n) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Alternativ: Antalet sätt att välja k bland n element, **med hänsyn till ordning, utan återläggning,** är $V_k(n) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$

ii) Antalet variationer med k element valda, **med upprepning**, bland n element är

$$\bar{V}_k(n) = n \cdot n \cdots n = n^k$$

Alternativ: Antalet sätt att välja k bland n element **med hänsyn till ordning och med återläggning** är $\bar{V}_k(n) = n^k$

Uppgift 4. Hur många tvåsiffriga naturliga tal kan vi skriva med siffrorna 2,4,6 och 8
a) utan upprepning b) med upprepning
Ange alla sådana tal.

a) **Utan upprepning**

$$V_2(4) = 4(4-1) = 4 \cdot 3 = 12$$

24, 26, 28,
42, 46, 48,
62, 64, 68,
82, 84, 86.

b) **Med upprepning**

$$\bar{V}_2(4) = 4 \cdot 4 = 4^2 = 16$$

22, 24, 26, 28,
42, 44, 46, 48,
62, 64, 66, 68,
82, 84, 86, 88.

DRAGNING UTAN HÄNSYN TILL ORDNING

KOMBINATIONER (delmängder)

En delmängd med ***k*** element valda bland **n** element **utan hänsyn till ordning** kallas en **kombination.**

Antalet kombinationer med **k** element valda bland **n** element betecknas $C_k(n)$ och beräknas enligt följande formel
$C_k(n) = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!}$
eller med ekvivalenta formeln $C_k(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
[**Förklaring:** Vi härleder ovanstående formel med hjälp av formeln för antalet variationer $V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$ och sambandet $V_k(n) = C_k(n) \cdot k!$.
Härav $C_k(n) = \frac{V_k(n)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$]

Uttrycket $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ betecknas ofta med $\binom{n}{k}$,(utläses n över k) och kallas binomialkoefficient.

Alltså

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Alternativ beskrivning: Antalet sätt att välja k bland n element **utan hänsyn till ordning och utan återläggning** är

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Anmärkning 1: Om vi tillåter återläggning då är antalet sätt att välja k bland n element **utan hänsyn till ordning, med återläggning,** är $\binom{n+k-1}{k}$

Anmärkning 2: $\binom{n}{0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1}$

EGENSKAPER för binomialkoefficienter:

$\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$,

$\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n-1} = n$,

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symmetri)

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ *binomialsatsen*

Uppgift 5. Beräkna

a) $\binom{5}{2}$, **b)** $\binom{4}{2}$ **c)** $\binom{7}{1}$ **d)** $\binom{7}{6}$ **e)** $\binom{7}{7}$ f) $\binom{100}{99}$ g) $\binom{55}{0}$

Lösning a) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\cdot 4\cdot\ 3\cdot 2\cdot 1}{(2\cdot 1)\cdot(\ 3\cdot 2\cdot 1)} = 10$

Svar b) 6 c) 7 d) 7 e) 1 f) $\binom{100}{99}=\binom{100}{1} = 100$ g) 1

==

Sammanfattning:

Antalet sätt att välja *k* element bland *n* element

	Utan återläggning	**Med återläggning**
Med hänsyn till ordning	$n(n-1)\cdots(n-(k-1))$	n^k
Utan hänsyn till ordning	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

==

Uppgift 6. På hur många sätt kan vi välja (utan hänsyn till ordning) 2 studenter bland 10.

Lösning: Eftersom vi väljer utan hänsyn till ordning, handlar det om kombinationer:

$$C_2(10) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!(8)!} = \frac{10\cdot 9\cdot\ 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot\ 3\cdot 2\cdot 1}{(2\cdot 1)\cdot(\ 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot\ 3\cdot 2\cdot 1)} = \text{(förkortning med 8!)}$$

$$= \frac{10\cdot 9}{(2\cdot 1)} = 45$$

Svar: 45

Uppgift 7. I en låda finns det 10 defekta och 90 korrekta produkter. Vi väljer 5 produkter på måfå (utan hänsyn till ordning).

a) På hur många sätt kan vi välja (utan hänsyn till ordning) 5 produkter bland 100?

b) På hur många sätt kan vi välja 2 defekta och 3 korrekta produkter?

c) Bestäm sannolikheten att få 2 defekta (och därmed 3 korrekta) bland 5 slumpvist valda produkter.

d) Högst 2 defekta

e) Minst 2 defekta

Du kan svara med binomialkoefficienter.

Lösning:

a)

$$C_5(100) = \binom{100}{5}$$

b)
Vi kan välja 2 bland 10 defekta på $C_2(10) = \binom{10}{2}$ sätt.
Vi kan välja 3 bland 90 korrekta på $C_3(90) = \binom{90}{3}$ sätt.

Enligt multiplikationsprincipen kan vi välja 2 defekta och 3 korrekta på

$$\binom{10}{2} \cdot \binom{90}{3}$$

sätt.

c) Sannolikheten $= \dfrac{\boldsymbol{antalet\ gynnsamma\ fall}}{\boldsymbol{alla\ möjliga\ fall}} = \dfrac{\binom{10}{2}\cdot\binom{90}{3}}{\binom{100}{5}}$

d) P(högst två defekta)
=P(ingen defekt (och därmed 5 korrekta))+ P(exakt 1 defekt)+ P(exakt 2 defekta)

$$= \frac{\binom{10}{0}\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} + \frac{\binom{10}{1}\binom{90}{4}}{\binom{100}{5}} + \frac{\binom{10}{2}\binom{90}{3}}{\binom{100}{5}}$$

$$= \frac{\binom{10}{0}\cdot\binom{90}{5} + \binom{10}{1}\cdot\binom{90}{4} + \binom{10}{2}\cdot\binom{90}{3}}{\binom{100}{5}}$$

e) P(minst två defekta)
= P(exakt 2 defekta (och därmed 3 korrekta))+ P(exakt 3 defekta)+ P(exakt 4 defekta)+ P(exakt 5 defekta)=

$$= \frac{\binom{10}{2}\binom{90}{3}}{\binom{100}{5}} + \frac{\binom{10}{3}\binom{90}{2}}{\binom{100}{5}} + \frac{\binom{10}{4}\binom{90}{1}}{\binom{100}{5}} + \frac{\binom{10}{5}\binom{90}{0}}{\binom{100}{5}}$$

$$= \frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{90}{3} + \binom{10}{3}\cdot\binom{90}{2} + \binom{10}{4}\cdot\binom{90}{1} + \binom{10}{5}\cdot\binom{90}{0}}{\binom{100}{5}}$$

Uppgift 8. Vi har 20 produkter, 10 av typ A , 6 av typ B och 4 av typ C och väljer 5 av de på måfå (utan återläggning).
Hur stor är sannolikheten att vi får
a) exakt 3 av typ A, i vilken ordning som helst
b) exakt 2 av typ A och exakt 2 av typ B , (därmed 1 av typ C) i vilken ordning som helst)
c) produkter i ordningen A, B, C, B, A?

Svar:
a) Lösning: Vi kan välja 3 bland 10 A på $\binom{10}{3}$ sätt och 2 bland 10 ”icke –A” dvs bland B eller C

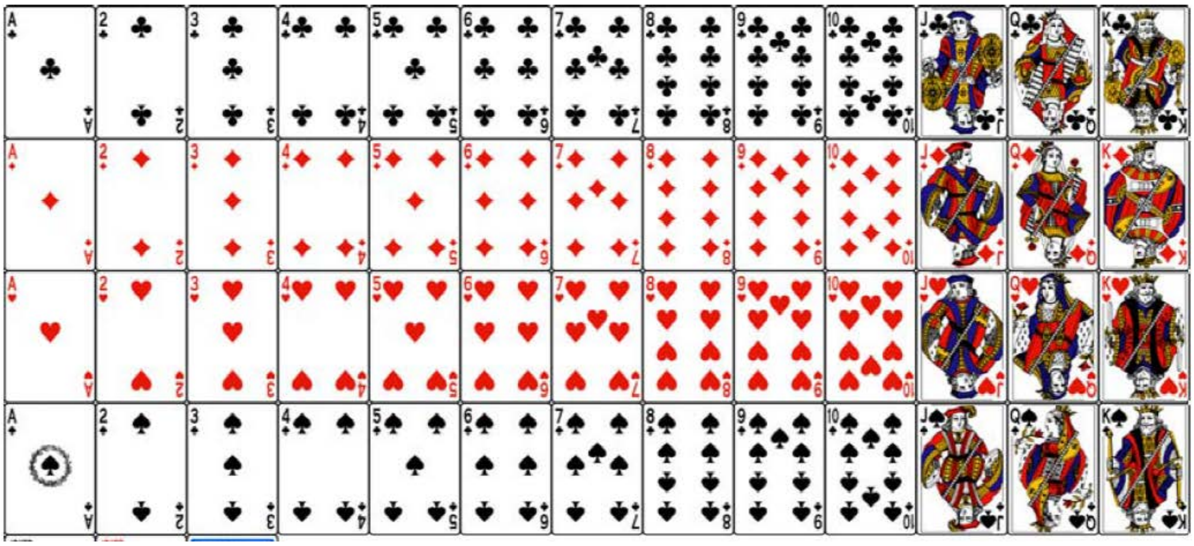
$$Pa = \frac{\binom{10}{3}\cdot\binom{10}{2}}{\binom{20}{5}} = 0.3482972136$$

b) Svar: $Pb = \frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{20}{5}} = 0.1741486068$

c) $Pc = \frac{10}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{4}{18}\cdot\frac{5}{17}\cdot\frac{9}{16} = 0.005804953560$

Uppgift 9.

En kortlek med 52 kort består av fyra färger (hjärter, spader, klöver, ruter) och 13 valörer: ess, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, knekt, dam, kung.



Ur en kortlek på 52 kort väljer man (utan återläggning) slumpvis 5 kort.
Vad är sannolikheten för att få (**utan hänsyn till ordning**)
a) exakt två treor en femma och två nior : {3,3 , 5, 9, 9}
b) exakt fyra åttor (och vilket som helst femte kort).
c) Två OLIKA par dvs (x,x,y,y,z) där x,y,z är olika valörer
t ex (5,5, 9,9, 2) eller (4,4,7,7,3) o s v.
d) Ett par och en triss .
Anmärkning: Ett par och en triss x,x,y,y,y , kallas "kåk" eller "full house" ,
(t ex 5,5, 7,7,7 eller 8,8,3,3,3 och liknande).

Lösning:

Vi kan välja 2 bland 4 treor på $\binom{4}{2}$ sätt; 1 bland 4 femmor på $\binom{4}{1}$ sätt och 2 bland 4 nior på $\binom{4}{2}$ sätt.

Därmed är antalet alla gynnsamma fall

$$g = \binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{2}$$

Å andra sidan för alla möjliga fall har vi; antalet sätt att välja 5 bland 52 är

$N = \binom{52}{5} =$ (= 2598960)

Därför är sannolikheten lika med

$$P = \frac{g}{N} = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{144}{2598960} = 0.0000554$$

b)
Antalet sätt att välja 5 bland 52 är
$N = \binom{52}{5} =$ (= 2598960)
Antalet sätt att få exakt fyra åttor (och vilket som helst femte kort) är (förklara varför)

$$g = \binom{4}{4} \cdot \binom{48}{1} = 48$$

Sannolikheten för (8,8,8,8, x) är

$$P = \frac{48}{2598960} = \frac{1}{54145} = 0.00001846892603$$

c) Vi kan välja två olika valörer som bildar två olika par på $\binom{13}{2}$ sätt. Två kort som bildar ett par väljer vi på $\binom{4}{2}$ sätt. Samma gäller för andra paret. Femte kort kan vi välja bland återstående 11 valörer.

$$\frac{\binom{13}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\ 11\cdot\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} \quad (= \frac{123552}{2598960} \approx 0.0475390156)$$

Svar d): $P = \dfrac{13\binom{4}{2}12\binom{4}{3}}{\binom{52}{5}} = \dfrac{3744}{2598960} \approx 0.00144057623$

Uppgift 10.
I en grupp finns det 6 kvinnliga och 7 manliga studenter. Man skall välja ett fotbollslag på 5 personer. Positionerna i laget bestäms vid ett senare tillfälle så vi bryr oss inte om dessa. Man väljer ett lag på måfå. Bestäm sannolikheten att i detta lag är kvinnorna i majoritet?

Lösning

a) Vi kan välja $\binom{13}{5}$ = **1287** lag.

Antalet lag där kvinnorna är i majoritet är $\binom{6}{3}\binom{7}{2}+\binom{6}{4}\binom{7}{1}+\binom{6}{5}\binom{7}{0}$ = **531**

Sannolikheten att kvinnorna är i majoriteten är 531/1287=59/143 = 0.41
Svar: 0.41
==

Upprepning av ett försök. (BINOMIAL FÖRDELNING)

Låt A vara en händelse som inträffar vid ett försök med sannolikheten p. Betrakta ett experiment som består av n oberoende upprepningar av delförsöket A. Då är sannolikheten att A inträffar exakt k gånger vid n upprepningar lika med $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Alltså

P(A inträffar exakt k gånger vid n oberoende upprepningar) $= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Bevis. Vi betraktar följder som innehåller A (k st.) och A^c (n-k st)

t ex $AA\cdots AA^c A^c \cdots A^c$ eller $AA^c AA^c \cdots A^c$.

Sannolikheten för en sådan följd är $p^k q^{n-k}$.

Antalet sådana permutationer som innehåller A, k gånger, och A^c, (n-k) gånger, är

$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$. Sådana följder är disjunkta händelser.

Därmed är sannolikheten att få exakt k gånger A vid n oberoende upprepningar lika med

$$P = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Anmärkning: Vi betecknar oftast $q = 1 - p$. Då skrivs ovanstående formel på kortare sätt

$$P = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Uppgift 11. Man kastar en tärning 4 gånger. Vad är sannolikheten att få

a) ingen etta.

b) exakt 2 ettor

c) minst 3 ettor

Lösning: Sannolikhet för etta vid en kast är p=1/6.

a) P(ingen etta vid n=4 kast)= $\binom{4}{0} p^0 (1-p)^4 = 1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$ = 0.48

b) P(exakt 2 ettor vid n=4 kast)= $\binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$ = 0.12

c) P(minst 3 ettor vid 4 kast)= P(tre) +P(fyra)= $\binom{4}{3} p^3 q^1 + \binom{4}{4} p^4 q^0 = 0.016$

(Anmärkning: q=1-p =5/6)

Uppgift 12. En produkt från en viss fabrik är defekt med sannolikheten p=0.2 . Man köper 10 produkter från fabriken.

a) Bestäm sannolikheten att exakt 2 av dem är defekta.

b) Bestäm sannolikheten högst 2 av dem är defekta.
c) Bestäm sannolikheten minst 2 av dem är defekta.

Lösning: a) P(exakt två defekta)= $\binom{10}{2} p^2(1-p)^8 = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot 0.2^2\cdot 0.8^8 = 0.30$

b) P(högst 2 defekta)=P(ingen) +P(en) +P(två)= $\binom{10}{0} p^0q^{10} + \binom{10}{1} p^1q^9 + \binom{10}{2} p^2q^8$ =0.68

där p=0.2 och q=1–p=0.8.

c) P(minst 2 defekta)=P(två) +P(tre) +...+P(tio)=1– {P(ingen) +P(en)}

$1-\left[\binom{10}{0} p^0q^{10} + \binom{10}{1} p^1q^9\right]$ =0.62.

Uppgift 13. Vi kastar 6 st. sexsidiga tärningar. Bestäm sannolikheten att få
a) samma tal på alla tärningar t ex 111111.
b) fyrtal och ett par t ex 5, 2,5,5,2,5
c) tre olika par t ex 5, 2,4,4,2,5

Lösning.

a) Antalet gynnsamma fall är g=6.
Antalet alla fall är N=6·6·6·6·6·6=6^6.

Därmed Pa= $\frac{6}{6^6} = \frac{1}{6^5}$ =0.0001286

b) Antalet sätt att få t. ex fyra gånger 5 och två gånger 2 är lika med antalet permutationer med element 5,5,5,5,2,2 som beräknas enligt

$P_{4,2}(6) = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$

Antalet sätt att välja x och y som bildar xxxxyy är 6·5=30 (variationer.

Därmed är antalet gynnsamma fall g= 6·5· $\frac{6!}{4!\cdot 2!}$ =30·15=450 och

Pb= $\frac{450}{6^6}$ = 0.009645

c) Vi kan välja tre olika resultat x, y och z som ingår i tre par xxyyzz på $\binom{6}{3}$ sätt.

Antalet permutationer av xxyyzz är $P_{2,2,2}(6) = \frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$.

Därmed är antalet gynnsamma fall g= $\binom{6}{3}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$ =20·90=1800 och

Pc= $\frac{1800}{6^6}$ = 0.03858

Svar. a) 0.0001286 b) 0.009645 c) 0.03858