BLANDADE PROBLEM.
KONTINUERLIGA- OCH BINOMIALFÖRDELNINGAR

I nedanstående exempel använder vi två fördelningar en kontinuerlig och därefter en binomialfördelning. Sannolikheten att en viss händelse A händer (1 gång) är en kontinuerlig s.v. Vi frågar om sannolikheten att A händer *k* gånger vid n upprepningar.

Vi löser problem i två steg.
1. Med hjälp av den givna kontinuerliga fördelningen bestämmer vi sannolikheten *p* för en händelse A.
2. Därefter använder vi binomialfördelning Bin(n,p) och bestämmer sannolikheten att A händer k gånger vid n upprepningar:

$$P_k = \binom{n}{k} p^k q^{(n-k)} \qquad \text{(där } q = 1 - p\text{).}$$

ÖVNINGSUPPGIFTER

Uppgift 1
Livslängden för en viss typ av elektronisk komponent antas vara exponentialfördelad med medelvärdet m=4 år. Man har 10 sådana komponenter som fungerar oberoende av varandra i en apparat. Beräkna sannolikheten att exakt 2 av de fungerar efter 5 år.

Lösning:
Steg 1. Vi betecknar livslängden hos en komponent med ξ.
Fördelningsfunktionen för en exponentialfördelning är

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{där } \lambda = \frac{1}{m}.$$

I vårt fall för livslängden ξ hos en komponent gäller

(livslängden är **mindre än t**) $P(\xi \le t) = F(t) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{-t}{4}}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$,

Händelsen A= "en komponent fungerar mer än 5 år”.
Sannolikheten för A dvs sannolikheten att **en komponent** fungerar mer än 5 år är

$$P(\xi > 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{\frac{-5}{4}}) = e^{\frac{-5}{4}} = 0.2865 .$$

Steg 2. Antalet fungerade bland 10 komponenter är Bin(10,p).
Sannolikheten att **exakt 2 av 10** komponenter fungerar mer än 5 år är

$$\binom{10}{2} p^2 q^8 = \binom{10}{2} 0.2865^2 (1 - 0.2865)^8 = 0.248087.$$

Svar: 0.248087

Uppgift 2.
Ett företag behöver 10 motstånd. Man köper för ändamålet in 11 motstånd av en viss typ. Dessa motstånd har en resistans som är N(200,10). Man använder sedan enbart de motstånd som har resistansen mellan 190 och 210 ohm . Vad är sannolikheten att man får minst 10 användbara motstånd av de 11 som man har köpt?

Lösning:

Steg 1.
Låt ξ beteckna resistansen hos **ett** motstånd. Då gäller $\xi \in$ N(200,10).

$P(190 < \xi < 210)$ =

$$F(210) - F(190) = \Phi(\frac{210-200}{10}) - \Phi(\frac{190-200}{10}) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.6827$$

Vi betecknar p = 0.6827 och $q = 1 - p$

Steg 2.
Låt η beteckna antalet användbara motstånd bland 11 köpta. Då gäller $\eta \in Bin(11, p)$

Sannolikheten att man får minst 10 användbara motstånd av de 11 är lika med

$$\binom{11}{10} p^{10} q + \binom{11}{11} p^{11} q^{0} = 0.091768$$

Svar: 0.092

Uppgift 3.
På ett lager finns 6 st mätinstrument. Livslängden för ett instrument kan antas vara en exponentialfördelad stokastisk variabel med väntevärdet 200 timmar.
a) Hur stor är sannolikheten att ett instrument håller minst 250 timmar
b) Bestäm sannolikheten för att minst fem av de sex instrumenten håller minst 250 timmar.

Lösning:

a)

$$E(\xi) = 200 \Rightarrow \lambda = 1/200 = 0{,}005$$

$$F(x) = 1 - e^{-0{,}005x}$$

$$p(\xi > 250) = 1 - p(\xi \le 250) = 1 - (1 - e^{-0{,}005 \cdot 250}) = \underline{\underline{0{,}2865}}$$

Svar a) 0,2865

b)

$$\eta \in Bin(6; \quad 0{,}2865)$$

$$p(\eta \ge 5) = p(\eta = 5) + p(\eta = 6) = \binom{6}{5} \cdot 0{,}2865^5 \cdot (1 - 0{,}2865) + 0{,}2865^6 = \underline{\underline{0{,}00882}}$$

Svar b) 0,00882

Uppgift 4. Längden av en rast vid en viss högskola har visat sig vara en stokastisk variabel ξ, där ξ har frekvensfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ b(10 - x) & , \quad 0 \le x \le 10 \\ 0 & , \quad x > 10 \end{cases}$$

a) Bestäm konstanten *b*
b) Vad är sannolikheten att en rast varar mer än 5 minuter?
c) Vad är sannolikheten att av 7 sådana raster varar högst 2 raster mer än 5 minuter?

Lösning:

a) $\int_0^{10} b(10 - x)dx = 1 \Rightarrow \left[b(10x - \frac{x^2}{2}) \right]_0^{10} = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{50}$

b) $P(\xi > 5) = \int_5^{10} \frac{1}{50}(10 - x)dx = \left[\frac{1}{50}(10x - \frac{x^2}{2}) \right]_5^{10} = \frac{1}{4} = 0.25$

c) Pc= $\binom{7}{0} p^0 q^7 + \binom{7}{1} p^1 q^6 + \binom{7}{2} p^2 q^5 = 0.7564$ där $p = 0.25, \quad q = 0.75$

Svar: **a)** $b = \frac{1}{50}$ **b)** 0.25 **c)** 0.7564