Linjära kombinationer av stokastiska variabler

Sats 1. Låt a, b vara konstanter och X stokastiska variabler där väntevärdet $E(X)=\mu$ och variansen $V(X)=\sigma^2$. Då gäller:

1. $E(aX+b)=aE(X)+b=a\mu+b$
2. $V(aX+b)=a^2V(X)=a^2\sigma^2$

Sats 2. Låt $c_1, c_2, \dots, c_n$ vara konstanter, $X_1, X_2, \dots, X_n$ stokastiska variabler, $E(X_i)=\mu_i$ och $V(X_i)=\sigma_i^2$. Då gäller:

1. $E(c_1X_1+c_2X_2+\dots+c_nX_n)=c_1\mu_1+c_2\mu_2+\dots+c_n\mu_n$,
2. $V(c_1X_1+c_2X_2+\dots+c_nX_n)=c_1^2\sigma_1^2+c_2^2\sigma_2^2+\dots+c_n^2\sigma_n^2$ om $X_1, X_2, \dots, X_n$ är **oberoende** s. v.

Uppgift 1.
Låt X vara en s.v. med väntevärdet $E(X)=13$ och standardavvikelsen $D(X)=\sigma=0.4$.
Beräkna $E(Y)$, $V(Y)$ och $D(Y)$ om Y= 2X+10.

Lösning:

$E(Y)=E(2X+10)=2E(X)+10=2\cdot 13+10=36$

$V(Y)=V(2X+10)=2^2V(X)=2^2\sigma^2=4\cdot 0.16=0.64$

$D(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{0.64}=0.8$

Uppgift 2.
Låt X_1, X_2, X_3 vara oberoende s.v. sådana att

$E(X_1)=\mu_1=10$, $E(X_2)=\mu_2=-20$, $E(X_3)=\mu_3=30$;

$D(X_1)=\sigma_1=3$, $D(X_2)=\sigma_2=2$, $D(X_3)=\sigma_3=1$;

Beräkna väntevärdet, variansen och standardavvikelsen till Y där

a) $Y=5X_1+4X_2-2X_3$

b) $Y=X_1+X_2-X_3$

Lösning:

a) $E(Y)=5E(X_1)+4E(X_2)-2E(X_3)=5\cdot 10+4\cdot(-20)-2\cdot(30)=-90$

$V(Y)=5^2(\sigma_1)^2+4^2(\sigma_2)^2+(-2)^2(\sigma_3)^2=25\cdot 9+16\cdot 4+4\cdot 1=293$

$D(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{293}$

b) $E(Y)=E(X_1)+E(X_2)-E(X_3)=-40$

$V(Y)=1^2(\sigma_1)^2+1^2(\sigma_2)^2+(-1)^2(\sigma_3)^2=1\cdot 9+1\cdot 4+1\cdot 1=14$

$D(Y)=\sqrt{V(Y)}=\sqrt{14}$

Uppgift 3.
Låt X_1, X_2, X_3 vara oberoende s.v. sådana att

$E(X_1)=\mu_1=10$, $E(X_2)=\mu_2=-20$, $E(X_3)=\mu_3=30$;

$D(X_1)=\sigma_1=3$, $D(X_2)=\sigma_2=2$, $D(X_3)=\sigma_3=1$;

Beräkna väntevärdet $E(Y)$, variansen $V(Y)$ och standardavvikelsen $D(Y)$ då

$Y = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$.

Lösning:

Eftersom $Y = \dfrac{X_1}{3} + \dfrac{X_2}{3} + \dfrac{X_3}{3}$ har vi

b) $E(Y) = \dfrac{1}{3}E(X_1) + \dfrac{1}{3}E(X_2) + \dfrac{1}{3}E(X_3) = \dfrac{20}{3}$

$$V(Y) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 (\sigma_1)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 (\sigma_2)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 (\sigma_3)^2 = \frac{1}{9}\cdot 9 + \frac{1}{9}\cdot 4 + \frac{1}{9}\cdot 1 = \frac{14}{9}$$

$$D(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{14}$$

Uppgift 4.

Låt X_1, X_2, X_3 vara exponentialfördelade s.v. med parametrar $\lambda_1 = 1/4$, $\lambda_2 = 1/5$ och $\lambda_3 = 1/10$, dvs $X_1 \in Exp(1/4)$, $X_2 \in Exp(1/5)$ och $X_3 \in Exp(1/10)$.

Låt vidare $Y = X_1 + 2X_2 + 3X_3$.

Beräkna väntevärdet $E(Y)$, variansen $V(Y)$ och standardavvikelsen $D(Y)$.

Lösning:

För att bestämma väntevärdet μ för en exponentialfördelade s. v. $X \in Exp(\lambda)$ använder vi sambandet $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$. Dessutom gäller $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$, därmed $\sigma = D(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ (kolla formelblad).

I vårt fall har vi därför

$\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 5$ och $\mu_3 = 10$

och

$\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 5$, $\sigma_3 = 10$.

Nu har vi

$$E(Y) = E(X_1) + 2E(X_2) + 3E(X_3) = 44$$

$$V(Y) = 1^2(\sigma_1)^2 + 2^2(\sigma_2)^2 + (3)^2(\sigma_3)^2 = 16 + 4\cdot 25 + 9\cdot 100 = 1016$$

$$D(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{1016}$$

Uppgift 5. En s.v. X har täthetsfunktionen $f(x) = \begin{cases} 4x^3 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$,

Bestäm väntevärdet och variansen för Y=10X+5.

Lösning:

Först bestämmer vi $\mu = E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 4x^4 dx = \frac{4}{5}$.

Eftersom $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 4x^5 dx = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ får vi

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 = \frac{2}{3} - \frac{16}{25} = \frac{2}{75}.$$

Nu har vi $E(10X + 5) = 10E(X) + 5 = 13$

$$V(10X + 5) = 10^2 V(X) = 100 \cdot \frac{2}{75} = \frac{8}{3}$$