MULTINOMIALFÖRDELNING

Multinomialfördelningen är en generalisering av binomialfördelningen.
Anta att ett försök har *r* möjliga utfall $A_1, A_2,\dots,A_r$ med sannolikheter $p_1, p_2,\dots p_r$ där $p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1$. Vi betraktar *n* oberoende upprepningar av detta försök och antar att vid varje försök utfaller $A_1, A_2,\dots,A_r$ med sannolikheterna $p_1, p_2,\dots p_r$. Sannolikheten att vid *n* oberoende upprepningar få
A_1 exakt k1 gånger, A_2 exakt k_2 gånger,…,A_r exakt k_r gånger, där $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ är

$$p = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} \qquad (*)$$

I nedanstående exempel förklarar vi formeln (*)

Anmärkning: Om r=2 har vi binomialfördelningen.

Exempel 1.
I en låda finns 100 lappar; 50 st. märkta A, 30 märkta B och 20 märkta C.
Vi tar 13 lappar på måfå
a) utan återläggning b) med återläggning.
Beräkna sannolikheten att vi får exakt 8 A, 2B och 3C bland de 13 valda lapparna.

Lösning:
a) Dragning utan återläggning.

$$p_a = \frac{\binom{50}{8}\binom{30}{2}\binom{20}{3}}{\binom{100}{13}}$$

b) Dragning med återläggning.
Sannolikheten att få A vid en dragning är $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$. Eftersom vi har dragning **med återläggning** får vi samma sannolikhet för A vid varje dragning.
Sannolikheten att få B vid en dragning är $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$.
Sannolikheten att få C vid en dragning är $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$.

Sannolikheten för AAAAAAAABBCCC är därmed $\left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^3$.

Samma sannolikhet gäller för varje permutation av AAAAAAAABBCCC. Det finns $\frac{13!}{8!\cdot 2!\cdot 3!}$ sådana permutationer. Därför är

$$p_b = \frac{13!}{8!\cdot 2!\cdot 3!}\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^3.$$

Svar: $p_a = \dfrac{\binom{50}{8}\binom{30}{2}\binom{20}{3}}{\binom{100}{13}}$, $\quad p_b = \dfrac{13!}{8!\cdot 2!\cdot 3!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^8\left(\dfrac{3}{10}\right)^2\left(\dfrac{1}{5}\right)^3$

Exempel 2.
I en låda finns 100 lappar; 50 st. märkta A, 30 märkta B och 20 märkta C.
Vi tar 13 lappar på måfå
a) utan återläggning b) med återläggning.
Beräkna sannolikheten att vi får exakt 8 A, 0 B och 5C bland de 13 valda lapparna.
Lösning:
a) Dragning utan återläggning.

$$p_a = \frac{\binom{50}{8}\binom{30}{0}\binom{20}{5}}{\binom{100}{13}} = \frac{\binom{50}{8}\binom{20}{5}}{\binom{100}{13}}$$

b) $p_b = \dfrac{13!}{8!\cdot 0!\cdot 5!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^8\left(\dfrac{3}{10}\right)^0\left(\dfrac{1}{5}\right)^5 = \dfrac{13!}{8!\cdot 5!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^8\left(\dfrac{1}{5}\right)^5$

Svar. $p_a = \dfrac{\binom{50}{8}\binom{20}{5}}{\binom{100}{13}}$ $\quad p_b = \dfrac{13!}{8!\cdot 5!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^8\left(\dfrac{1}{5}\right)^5$

Exempel 3.
Man kastar en tärning 10 gånger. Bestäm sannolikheten att få
a) 1:an exakt 2 gånger (och något annat 8 gånger).
b) 1:an exakt 2 gånger 3:an exakt 4 gånger (och något annat 4 gånger).
c) 1:an exakt 2 gånger 3:an exakt 4 gånger 5:an exakt 3 gånger och 6:an 1 gång.

Svar:
Alla frågor handlar om multinomialfördelning (där fallet a är ett speciellt fall, binomialfördelning)

a) Sannolikheten för 1:an vid ett kast är $\dfrac{1}{6}$ och för ett annat tal $\dfrac{5}{6}$. Därför

$$p_a = \frac{10!}{2!\cdot 8!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8 = \binom{10}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8$$

b) $p_b = \dfrac{10!}{2!\cdot 4!\cdot 4!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{1}{6}\right)^4\left(\dfrac{4}{6}\right)^4 = \dfrac{10!}{2!\cdot 4!\cdot 4!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^6\left(\dfrac{4}{6}\right)^4$

c) $p_c = \dfrac{10!}{2!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 1!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{1}{6}\right)^4\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\left(\dfrac{1}{6}\right)^1 = \dfrac{10!}{2!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 1!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{10}$