Linjära kombinationer av NORMALFÖRDELADE stokastiska variabler

För en linjär kombination $c_1\xi_1 + c_2\,\xi_2 + \ldots + c_n\,\xi_n$ av oberoende s.v. är det enkelt att beräkna väntevärdet, variansen och standardavvikelsen:

1. $E(c_1\xi_1 + c_2\,\xi_2 + \ldots + c_n\,\xi_n) = c_1\mu_1 + c_2\,\mu_2 + \ldots + c_n\,\mu_n$
2. $V(c_1\xi_1 + c_2\,\xi_2 + \ldots + c_n\,\xi_n) = c_1^{\,2}\sigma_1^{\,2} + c_2^{\,2}\,\sigma_2^{\,2} + \ldots + c_n^{\,2}\sigma_n^{\,2}$
3. Standardavvikelsen är lika med $\sqrt{\text{variansen}} = \sqrt{c_1^{\,2}\sigma_1^{\,2} + c_2^{\,2}\,\sigma_2^{\,2} + \ldots + c_n^{\,2}\sigma_n^{\,2}}$

Men fördelningen för en linjär kombination är i allmänhet besvärlig att bestämma.
Ett undantag är linjära kombinationer av NORMALFÖRDELADE s.v. för vilka gäller:
En linjär kombination av oberoende NORMALFÖRDELADE s.v. är NORMALFÖRDELAD s.v

S 2.2 Låt $c_1, c_2, \ldots, c_n$ vara konstanter, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ oberoende stokastiska variabler och $\xi_i \in N(\mu_i, \sigma_i)$. Då gäller:

$$c_1\xi_1 + c_2\,\xi_2 + \ldots + c_n\,\xi_n \in N\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\mu_i\,,\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^{\,2}\sigma_i^{\,2}}\right)$$

Här har vi två s**peciella fall** av satsen S 2.2:

För summan av normalfördelade s.v som dessutom är **likafördelade** dvs $\mu_i = \mu$ och $\sigma_i = \sigma$ har vi

$$E(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = \mu + \mu + \cdots \mu = n \cdot \mu$$

$$V(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = \sigma^2 + \sigma^2 + \cdots \sigma^2 = n \cdot \sigma^2$$

och därmed standardavvikelsen $= \sqrt{n \cdot \sigma^2} = \sigma\sqrt{n}$. Därmed har vi följande sats för summan.

S 2.3 Låt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vara oberoende stokastiska variabler och $\xi_i \in N(\mu, \sigma)$. Då gäller:

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \in N(n \cdot \mu, \sigma\sqrt{n})$$

och **medelvärdet**

På liknande sätt får vi följande sats om **medelvärdet:**

S 2.4 Låt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vara oberoende stokastiska variabler och $\xi_i \in N(\mu, \sigma)$. Då gäller:

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \in N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

==

ÖVNINGSUPPGIFTER (tagna från gamla tentamina)

Uppgift 1. (2p) Låt $\xi_1 \in N(10, 2)$ och $\xi_2 \in N(4, 1)$ vara oberoende samt

$$\eta = \xi_1 - 2\xi_2$$

a) bestäm väntevärdet och standardavvikelsen för η.
b) Bestäm den betingade sannolikheten att $\eta > 3$ givet att $1 < \eta < 5$,
dvs bestäm $P(\eta > 3 \mid 1 < \eta < 5)$.

Lösning:
a) $E(\eta) = 1 \cdot m_1 - 2 \cdot m_2 = 2$

$$\sigma^2 = Varians(\eta) = 1^2\sigma_1^2 + (-2)^2\sigma_2^2 = 8$$

$$\sigma = \sqrt{8} \approx 2.828$$

Svar a) $E(\eta) = 2$ **,** $\sigma = \sqrt{8} \approx 2.828$
dvs $\eta \in N(2;\ 2.828)$

b)
Om vi betecknar med A händelsen $\eta > 3$ och med B händelsen $1 < \eta < 5$
Då gäller $A \cap B = 3 < \eta < 5$ och

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(3 < \eta < 5)}{P(1 < \eta < 5)} = \frac{F(5) - F(3)}{F(5) - F(1)} = 0.44$$

(eftersom $F(5) = \Phi(\frac{5-2}{2.828}) = 0.8556$, $F(3) = 0.6381$ och $F(1) = 0.3618$)

Svar b) $P(\eta > 3 \mid 1 < \eta < 5) = 0.44$

Uppgift 2. Man tillverkar axlar och nav. Axeldiametern är $\xi_a \in N(19.0;0.5)$ mm och navdiametern är $\xi_n \in N(21.0;0.5)$ mm. Hur stor är sannolikheten att axeln passar till navet, om man parar ihop axel och nav slumpmässigt och skillnaden mellan nav – och axeldiameter ej får vara mer än 3,0 mm? (Dessutom måste navdiametern vara större än axeldiametern)

Lösning:
Axeldiametern $\xi_a \in N(19.0;0.5)$ och navdiametern $\xi_n \in N(21.0;0.5)$. .

$\eta = \xi_n - \xi_a$, $\eta \in N(21.0 - 19.0; \sqrt{0.5^2 + 0.5^2})$ =N(2; $\sqrt{0.5}$)

Nav passar till axel om $0 \le \eta \le 3.0$

$$P(0 \le \eta \le 3.0) = \Phi(\frac{3-2.0}{\sqrt{0,5}}) - \Phi(\frac{0-2}{\sqrt{0,5}}) = \Phi(1.41) - \Phi(-2.83) = 0.9207 - 0.0023 = 0.9184$$

Svar: 0.92

Uppgift 3. Vid tillverkning av kolvar och cylindrar kan diametern för en viss typ av kolv betraktas som en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärdet 8.10 mm och standardavvikelsen 0.12 mm. För cylindrarna kan hålets diameter betraktas som en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärdet 8.35 mm och standardavvikelsen 0.16 mm. En cylinder anses passa till en kolv om hålets diameter är större än kolvens diameter och om skillnaden ej överstiger 0.6 mm. Hur stor är sannolikheten att kolven passar till cylindern vid ett slumpmässigt val?

Lösning:

$$\xi \in N(8{,}35; 0.16)$$

$$\eta \in N(8.10; 0.12)$$

$$Y = \xi - \eta \in N(0.25; \sqrt{0.16^2 + 0.12^2})$$

$$P(0 \le Y \le 0.6) = P(Y \le 0.6) - P(Y \le 0) =$$

$$\Phi(\frac{0.6 - 0.25}{0.2}) - \Phi(\frac{0 - 0.25}{0.2}) = \Phi(1.75) - \Phi(-1.25)$$

$$= 0.9599 - 0.1056$$

$$= 0.85$$

Svar: 0,85

Uppgift 4. I ett kontorshus finns en hiss med anslaget ”max 3 personer eller 240 kg”. Vi vill därför veta hur stor sannolikheten är att hissen överlastas. Antag att vikten av en anställd är normalfördelad med väntevärde 77 kg och standardavvikelse 8 kg. Olika personers vikt är oberoende. Beräkna sannolikheten att vikten av tre personer överskrider 240 kg.

Lösning:

Låt ξ_k , k=1,2,3 vara vikten av en slumpvis vald person. $\xi_k \in N(77{,}8)$. Summan av tre personers vikter är då

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \in N(3 \cdot 77, \sqrt{3} \cdot 8)$$

Sannolikheten för överlast ges av

$$P(\eta > 240) = 1 - \Phi(\frac{240 - 3 \cdot 77}{\sqrt{3} \cdot 8}) = 1 - \Phi(0.65) = 0.2578$$

Svar: Sannolikheten för överlast är 0.258

Uppgift 5. Vid en automatförpackning av kex placeras dessa intill varandra mellan två stöd, där stödavståndet är 20 cm. Tjockleken hos kexen kan anses N(2, 0.5)

Vad är sannolikheten att kexpaketet innehåller åtminstone 9 kex.

Lösning:

Låt ξ_k vara längden av kex som står på plats *k* och

$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_9$

Då gäller $\eta \in N(9 \cdot 2;\ 0.5\sqrt{9})$, d v s $\eta \in N(18;\ 1.5)$.

Kexpaketet innehåller åtminstone 9 kex om

$$\eta \le 20$$

$$P(\eta \leq 20) = F(20) = \Phi(\frac{20-18}{1.5}) \approx 0.91$$

Uppgift 6.
Tiden (i minuter) som det tar att genomföra en viss kemisk tillverkningsprocess antas vara N(200,10)-fördelad. Tiden för att, efter processens avslutande, återställa den använda apparaturen, så att processen på nytt kan påbörjas, antas vara N(30,3)-fördelad. Låt T vara den sammanlagda tiden för att först genomföra tillverkningsprocessen, sedan återställa apparaturen och slutligen genomföra tillverkningsprocessen igen. Tiderna för tillverkningsprocesserna och återställandet antas vara oberoende.
Beräkna P(T>445).

Lösning:
Låt ξ_1 och ξ_2 vara processtiderna och η tiden för återställandet, d v s $T=\xi_1+\xi_2+\eta$.
Då T är en summa av oberoende normalfördelade s v, så är även T normalfördelad, med
$E[T]=E[\xi_1] +E[\eta]+E[\xi_2] = 200+30+200=430$ och
$V[T]=V[\xi_1]+ V[\eta]+V[\xi_2]=10^2+3^2+10^2=209$.
Standardavvikelsen $= \sigma = \sqrt{209} = 14.4568$
Alltså gäller $T\in N(430;14.46)$.
Detta ger

$$P(T>445) = 1-P(T\leq 445) =1-F(445) =1-\Phi(\frac{445-430}{14.46}) = 1-\Phi(1.04)=1-0.8508=0.15$$

Svar: 0.15

Uppgift 7.
I en container skall lådor av tre olika storlekar packas. Totalt skall det packas 20 lådor av Typ1 vars vikt är normalfördelad med väntevärdet 11 kg och standardavvikelsen 1.5 kg, 15 lådor av typ 2 vars vikt är normalfördelad med väntevärdet 22 kg och standardavvikelsen 2.0 kg samt 8 lådor av typ 3 vars vikt är normalfördelad med väntevärdet 34 kg och standardavvikelsen 3.1 kg. Hur stor är sannolikheten att containerns innehåll kommer att väga mer än 830 kg?
Lösning:

$$\eta = \sum_1^{43} \xi_i = \xi_1 + \cdots + \xi_{20} + \xi_{21} + \cdots + \xi_{35} + \xi_{36} + \cdots + \xi_{43}$$

Väntevärdet:

$$E(\eta) = E(\xi_1) + \cdots + E(\xi_{20}) + E(\xi_{21}) + \cdots + E(\xi_{35}) + E(\xi_{36}) + \cdots + E(\xi_{43})$$
$$= 11 + \cdots + 11 + 22 + \cdots + 22 + 34 + \cdots + 34$$
$$= 20 \cdot 11 + 15 \cdot 22 + 8 \cdot 34 = 822$$

Variansen:

$$V(\eta) = 1^2 V(\xi_1) + \cdots + 1^2 V(\xi_{20}) + 1^2 V(\xi_{21}) + \cdots + 1^2 V(\xi_{35}) + 1^2 V(\xi_{36}) + \cdots + 1^2 V(\xi_{43})$$
$$= 1.5^2 + \cdots + 1.5^2 + 2^2 + \cdots + 2^2 + 3.1^2 + \cdots + 3.1^2 = 20 \cdot 1.5^2 + 15 \cdot 2^2 + 8 \cdot 3.1^2$$
$$= 20 \cdot 1.5^2 + 15 \cdot 2^2 + 8 \cdot 3.1^2$$

Standardavvikelsen är $\sqrt{20 \cdot 1.5^2 + 15 \cdot 2^2 + 8 \cdot 3.1^2} = 13.486$
Därmed är $\eta \in N(822;13.486)$.

Härav $p(\eta > 830) = 1 - p(\eta \leq 830) = 1 - \Phi(\frac{830-822}{13.486}) = 1 - \Phi(0.593) = 0.28$