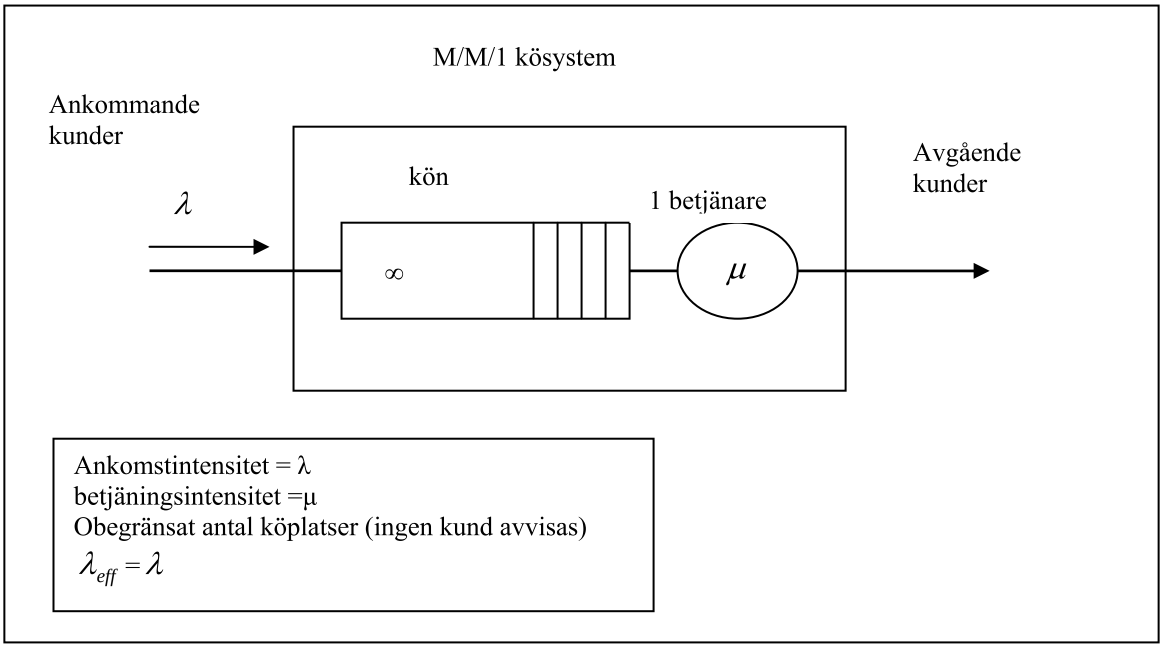
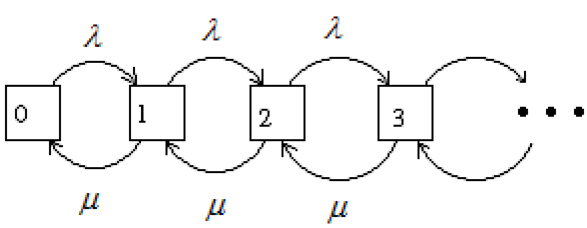
M/M/1 kösystem

Ett M/M/1 betjäningssystem har följande egenskaper:

1. Systemet har en betjänare. Betjäningstiderna är exponentialfördelade med medelvärde $\bar{x} = \frac{1}{\mu}$.
2. Kunder ankommer enligt Poissonprocess med ankomstintensiteten λ kunder per tidsenhet.
3. Obegränsat antal köplatser



Figur 1.



Figur 2. Tillståndsgraf för ett M/M/1 kösystem.

Beteckningar:

N	Medelantal kunder i systemet, $N = N_q + N_s$
N_q	Medelantal kunder i kön
N_s	Medelantal kunder i betjänarna
$\tilde{x}$	Betjäningstid för en kund (stokastisk variabel)
$\bar{x}$	Medel betjäningstid för en kund, $\bar{x} = E(\tilde{x})$
$\tilde{w}$	Väntetid (=tid i kö) för en kund (stokastisk variabel)
W	Medel väntetid för en kund, $W = E(\tilde{w})$
$\tilde{s}$	Total tid i systemet för en kund; $\tilde{s} = \tilde{x} + \tilde{w}$
T	Medel totaltid i systemet för en kund $T = E(\tilde{s})$, $T = W + \bar{x}$
λ	Ankomstintensitet
λ_{eff}	Effektiv ankomstintensitet
μ	Betjäningsintensitet
ρ	Erbjuden trafik , $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
p_k	Stationära sannolikheter; p_k är sannolikheten för k kunder i systemet

Några formler för ett M/M/1 kösystem:

I ett M/M/1 kösystem är $\mu > \lambda$ (annars bildas en obegränsad kö)

$$N = N_q + N_s$$

$$T = W + \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\mu}$$

$$p_k = p_0 \cdot \rho^k$$

$$p_0 = 1 - \rho$$

$$N = \frac{\rho}{1-\rho} \quad ,$$

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Fördelningsfunktionen för den totala tiden i systemet för en kund är

$$F_{\tilde{s}}(t) = P(\tilde{s} \le t) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}$$

Littles formler:

$N = \lambda_{eff} \cdot T$ (I ett M/M/1 system $\lambda_{eff} = \lambda$, eftersom ingen kund avvisas)

$N_q = \lambda_{eff} \cdot W$

$N_s = \lambda_{eff} \cdot \bar{x}$

ÖVNINGSUPPGIFTER:

Uppgift 1. I ett M/M/1 system är betjäningsintensiteten $\mu = 20$ kunder /minut. Medelantal kunder i systemet är N=3 kunder.

a) Härled formeln $N = \dfrac{\rho}{1-\rho}$

b) Beräkna ankomstintensiteten λ och medelväntetiden i kön W.

Lösning a) I ett M/M/1 system gäller $p_0 = 1-\rho$ där $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

För att härleda formeln $N = \dfrac{\rho}{1-\rho}$ använder vi att

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \rho^{k-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2} \quad (*)$$

(som vi får genom derivering av den geometriska serien $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \dfrac{1}{1-\rho}$)

Medel antal kunder i ett M/M/1 system blir då

$$N = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \rho^k \cdot p_0 = \rho \cdot p_0 \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \rho^{k-1} = [\text{enligt } (*)]$$

$$\rho \cdot p_0 \frac{1}{(1-\rho)^2} = \rho \cdot (1-\rho) \frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Svar b) $\lambda = 15$, W=0.15 minuter (=9 sekunder)

Uppgift 2. I ett M/M/1 system är betjäningsintensiteten $\mu = 10$ kunder /minut. Medel totaltid i systemet är T=3 minuter.

a) Härled formeln $T = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$ (Börja med formeln $N = \dfrac{\rho}{1-\rho}$ och använd Littles formel)

b) Beräkna ankomstintensiteten λ , N och medelbetjäningstiden $\bar{x}$.

Svar: b) $\lambda = 9.6666$, N=29, $\bar{x}$=0.1 minuter

Uppgift 3. En kommunikationskanal i ett datornät har kapaciteten 1000 000bitar/sekund. Till kanalen ankommer meddelanden enligt en Poissonprocess med intensiteten λ=100 meddelanden/sekund. Meddelandena har en längd som är exponentialfördelad med medelvärdet v= 5 000 bitar. *Vi betraktar ett meddelande som "en kund".*
Vi antar att vi kan modellera systemet som ett vanligt M/M/1 system med ködisciplin FCFS (First- Come- First- Served).

Beräkna

a) μ b) ρ c) $\bar{x}$ d) N e) T f) W g) N_q

Svar:

a) μ =100000/5000=200 meddelande per sekund b) ρ =1/2 c) $\bar{x}$ =1/200 s d) N =1

e) T =1/100 s f) W =1/200 s g) N_q =1/2

Uppgift 4. En kommunikationskanal i ett datornät har kapaciteten K bitar/sekund. Till kanalen ankommer meddelanden enligt en Poissonprocess med intensiteten λ=2400 meddelanden/minut. Meddelandena har en längd som är exponentialfördelad med medelvärdet v= 1000 bitar. *Vi betraktar ett meddelande som "en kund".*

Vi antar att vi kan modellera systemet som ett vanligt M/M/1 system med ködisciplin FCFS (First- Come- First- Served).

a) Bestäm det minsta värdet på K som erfordras, för att medelvärdet av totala tiden i systemet blir högst T= 1 sekund. Bestäm för detta K:

b) μ c) N d) $\bar{x}$ e) W

Lösning a) Vi ska använda 1 sekund som tidsenhet. Vi har λ=2400 meddelanden/minut =40 meddelanden/sekund.

Betjäningsintensitet som krävs för att få T=1 bestämmer vi med hjälp av formeln $T = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$

som ger

$1 = \dfrac{1}{\mu - 40} \Rightarrow \mu - 40 = 1 \Rightarrow \mu = 41$.

Alltså för att få T=1s krävs det betjäningsintensitet $\mu = 41$ meddelande per sekund.

Eftersom 1 meddelande har i genomsnitt 1000 bitar drar vi slutsats att vi behöver en överföringskapacitet med minst

K=$41 \cdot 1000$=41000 bitar per sekund.

Svar: a) K= 41000 bitar/sekund. b) μ = 41 meddelanden / sekund c) $N = 40$

d) $\bar{x} = \dfrac{1}{41}$ s e) W = $\dfrac{40}{41}$ s

Uppgift 5. En kommunikationskanal i ett datornät har kapaciteten K bitar/sekund. Till kanalen ankommer meddelanden enligt en Poissonprocess med intensiteten λ=600 meddelanden/minut. Meddelandena har en längd som är exponentialfördelad med medelvärdet v= 5000 bitar. *Vi betraktar ett meddelande som "en kund".*

Vi antar att vi kan modellera systemet som ett vanligt M/M/1 system med ködisciplin FCFS (First- Come- First- Served).

a) Bestäm det minsta värdet på K som erfordras, för att **medelvärdet** av totala tiden i systemet blir högst T= 0.1 s.

b) Bestäm sannolikheten att för detta K värde totala tiden i systemet blir längre än 0.4 sekunder.

c) Bestäm sannolikheten att för detta K värde totala tiden i systemet blir mindre än 0.3 sekunder.

Svar: a) K=100 000 bitar/sekund ($\mu = 20$ med/sekund)
Lösning b) Fördelningsfunktionen för den totala tiden i systemet för en kund är

$F_{\tilde{s}}(t) = P(\tilde{s} \le t) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}$. Därför

$$P(\tilde{s} > t) = 1 - (1 - e^{-(\mu-\lambda)0.4}) = e^{-10\cdot 0.4} = e^{-4}$$

Svar: c) $1 - e^{-3}$

Uppgift 6. En kommunikationskanal i ett datornät har kapaciteten K bitar/sekund. Till kanalen ankommer meddelanden enligt en Poissonprocess med intensiteten λ=300 meddelanden/minut. Meddelandena har en längd som är exponentialfördelad med medelvärdet v= 4000 bitar.
Vi antar att vi kan modellera systemet som ett vanligt M/M/1 system med ködisciplin FCFS (First- Come- First- Served).

a) Bestäm det minsta värdet på K som erfordras för att medelvärdet av totala tiden i systemet blir högst T= 0.25 sekunder.
b) Bestäm μ och W för detta K värde.
c) Bestäm sannolikheten att för detta K värde totala tiden i systemet blir mindre än 1.25 sekunder men längre än 0.5 sekunder.
Svar:
a) K=36 000 bitar/sekund (λ=5 meddelanden/s)
b) μ = 9 med/sekund)
c) $e^{-2} - e^{-5}$

Uppgift 7. En kommunikationskanal i ett datornät har kapaciteten K bitar/sekund. Till kanalen ankommer meddelanden enligt en Poissonprocess med intensiteten λ=180 meddelanden/minut. Meddelandena har en längd som är exponentialfördelad med medelvärdet v= 3000 bitar.
Vi antar att vi kan modellera systemet som ett vanligt M/M/1 system med ködisciplin FCFS (First- Come- First- Served).

Beräkna det minsta värdet på K som erfordras för att sannolikheten att totala tiden i systemet > 3 sekunder ska bli ≤ 0.1

Lösning: Först λ=180 meddelanden/minut= 3meddelande/sekund
Fördelningsfunktionen för den totala tiden i systemet för en kund är

$F_{\tilde{s}}(t) = P(\tilde{s} \le t) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}$.

Villkoret

$P(\tilde{s} > 3) \le 0.1$ ger

$1 - (1 - e^{-(\mu-\lambda)3}) \le 0.1 \Leftrightarrow e^{-(\mu-\lambda)3} \le 0.1 \Leftrightarrow -(\mu-\lambda)\cdot 3 \le \ln(0.1)$

multiplikation med –1 ger

$(\mu-\lambda)\cdot 3 \ge -\ln(0.1)$ eller $\mu \ge \lambda - \frac{1}{3}\ln(0.1)$ (notera att $\ln(0.1) = \ln(\frac{1}{10}) = -\ln 10$)

som vi kan skriva som $\mu \ge \lambda + \frac{1}{3}\ln(10)$ eller (eftersom λ=3 med/s)

$\mu \geq 3+\frac{1}{3}\ln(10)$.

Därmed $K \geq 3000(3+\frac{\ln 10}{3}) = 11303$

Svar: Det minsta som krävs är $K = 3000(3+\frac{\ln 10}{3}) \approx 11303$ bitar/s.

Uppgift 8. En kommunikationskanal i ett datornät har kapaciteten
10 Megabitar/sekund. Till kanalen ankommer meddelanden enligt en Poissonprocess med intensiteten λ meddelanden/sekund. Meddelandena har en längd som är exponentialfördelad med medelvärdet v= 100 000 bitar.
Vi antar att vi kan modellera systemet som ett vanligt M/M/1 system med ködisciplin FCFS (First- Come- First- Served).
a) Beräkna μ
b) Beräkna det största värdet på λ som tillåtas, för att sannolikheten att totala tiden i systemet > 2 sekunder ska bli ≤ 0.01
Svar: a) μ =100 b) λ=100–ln(10) ≈ 97.697 meddelande per sekund.

Uppgift 9. Vi betraktar ett M/M/1 kösystem.
Bestäm sannolikheten att det finns minst *k* kunder i systemet.

Lösning:
P(*Antalet kunder* ≥ *k*) =

$$p_k + p_{k+1} + p_{k+2} + \cdots =$$

$$p_0\rho^k + p_0\rho^{k+1} + \cdots =$$

$$p_0\rho^k(1+\rho^1+\rho^2\cdots) =$$

$$p_0\rho^k\frac{1}{1-\rho} =$$

$$(1-\rho)\rho^k\frac{1}{1-\rho} = \rho^k$$

Svar: P(*Antalet kunder* ≥ *k*)= ρ^k

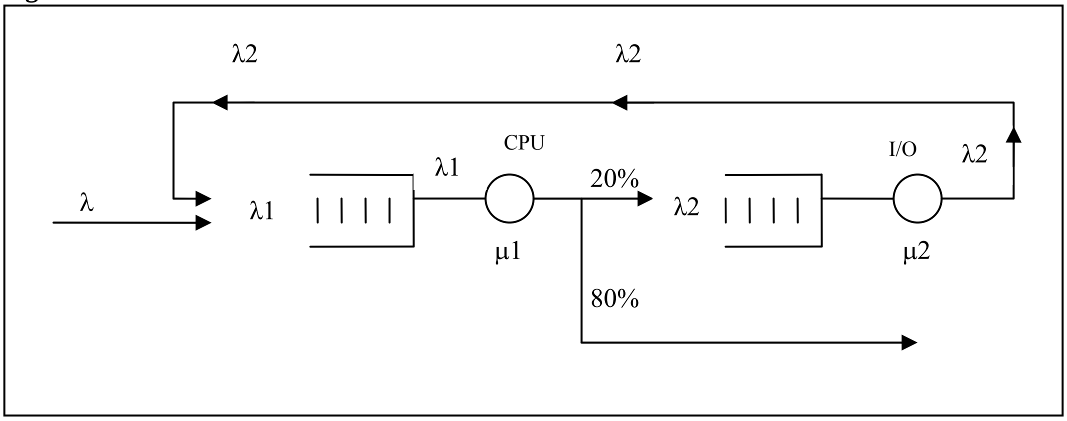
==

När vi betraktar ett könät som består av flera M/M/1 kösystem först bestämmer vi de effektiva ankomstintensiter för varje M/M/1 system. Därefter gör vi beräkningar i varje system separat.

Uppgift 10. Vi betraktar ett könät som består av två M/M/1 kösystem (CPU och I/O) . Nya program (kunder) kommer Poissonfördelade till CPU med intensiteten $\lambda = 16$ program per minut. Medelbetjäningstid för ett program i CPU är $\overline{x}_1$=2 sekunder och medelbetjäningstiden i I/O är $\overline{x}_2$ =6 sekunder .
80% av program lämnar nätet efter betjäning i CPU men 20% fortsätter först till I/O och därefter igen till CPU (se **Fig. 10).**

Beräkna medelantal program (kunder) i nätet (d v s program i CPU + program i I/O)

Fig. 10.



Lösning:

Vi betecknar med λ_1 och λ_2 de effektiva intensiteter till första (CPU) och andra (I/U) kön.

Då gäller:

$\lambda_1 = \lambda + \lambda_2$

$\lambda_2 = 0.20\lambda_1$

Härav $\lambda_1 = 20$ (program / min) och $\lambda_2 = 4$.

Dessutom har vi $\mu_1 = \dfrac{1}{\overline{x}_1} = 30$ (program / min) och $\mu_2 = \dfrac{1}{\overline{x}_2} = 10$ (program / min).

Eftersom $\rho_1 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1} = \dfrac{2}{3}$ har vi $N_1 = \dfrac{\rho_1}{1-\rho_1} = 2$.

På samma sätt $\rho_2 = \dfrac{2}{5}$ har vi $N_2 = \dfrac{\rho_2}{1-\rho_2} = \dfrac{2}{3}$.

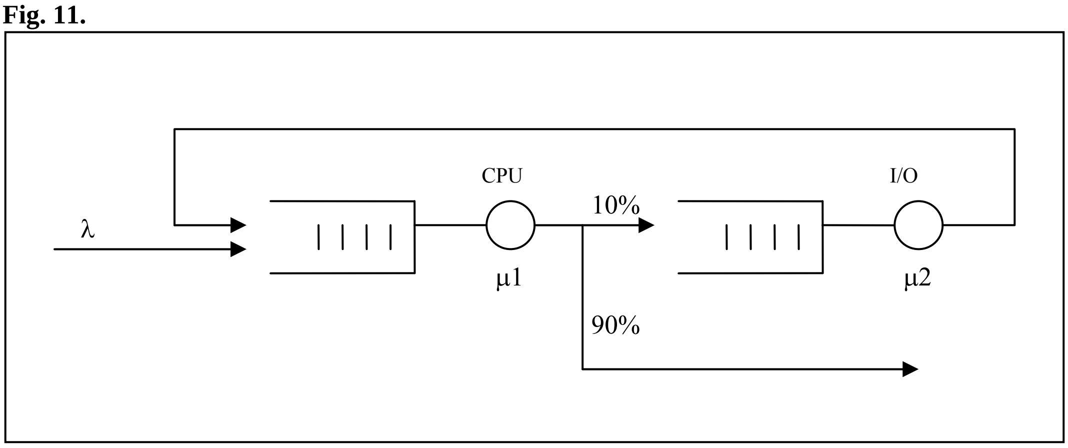
Slutligen $N = N_1 + N_2 = \dfrac{8}{3}$.

Svar: $N = \dfrac{8}{3}$

Uppgift 11. Vi betraktar ett könät som består av två M/M/1 kösystem (CPU och I/O) . Nya program (kunder) kommer Poissonfördelade till CPU med intensiteten $\lambda = 9$ program per minut. Medelbetjäningstid för ett program i CPU är $\overline{x}_1$=3 sekunder och medelbetjäningstiden i I/O är $\overline{x}_2$ =20 sekunder . 90% av program lämnar nätet efter betjäning i CPU men 10% fortsätter först till I/O och därefter igen till CPU (se **Fig. 11).**

Beräkna medelantal program (kunder) i nätet (d v s program i CPU + program i I/O)

Fig. 11.



Lösning:

Vi betecknar med λ_1 och λ_2 de effektiva intensiteter till första (CPU) och andra (I/U) kön.

Då gäller:

$\lambda_1 = \lambda + \lambda_2$

$\lambda_2 = 0.10\lambda_1$

Härav $\lambda_1 = 10$ (program / min) och $\lambda_2 = 1$.

Dessutom har vi $\mu_1 = \frac{1}{\bar{x}_1} = 20$ (program / min) och $\mu_2 = \frac{1}{\bar{x}_2} = 3$ (program / min).

Eftersom $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{1}{2}$ har vi $N_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = 1$.

På samma sätt $\rho_2 = \frac{1}{3}$ och $N_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{1}{2}$.

Slutligen $N = N_1 + N_2 = \frac{3}{2}$.

Svar: $N = \frac{3}{2}$