SANNOLIKHETER

GRUNDLÄGGANDE BEGREPP OCH BETECKNINGAR

Utfall – Resultat av ett slumpmässigt försök.
Utfallsrummet – Mängden av alla utfall (betecknas oftast med Ω).
Händelse – En delmängd av utfallsrummet.

Exempel. (Tärningskast)
Vi har sex möjliga **utfall** 1, 2, 3, 4, 5 och 6.
Därför är **utfallsrummet** $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5,6\}$.

Några exempel på **händelser**:

$A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{2, 4, 6\}$,

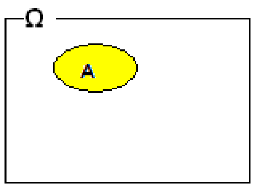
$A_4 = \{\} = \emptyset$ (den tomma mängden är också en händelse),

$A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$,(hela utfallsrummet är också en händelse).

Den klassiska SANNOLIKHETSDEFINITIONEN
Antag att utfallsrummet Ω består av **n** lika sannolika utfall och A en händelse med **g** element (g= antalet " **gynnsamma fall**").
Sannolikheten för händelsen A är

$$P(A) = \frac{g}{n}$$

Den **geometriska** tolkningen av sannolikheten

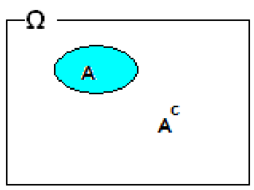


Sannolikheten för händelsen A är

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{Arean(A)}{Arean(\Omega)}}$$

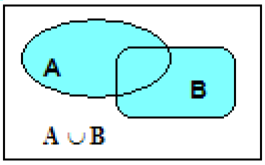
Relationer mellan händelser kan åskådliggöras med hjälp av **mängddiagram**.

1.



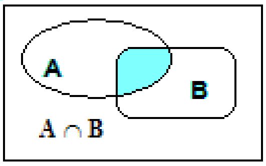
Komplement till A.

2.



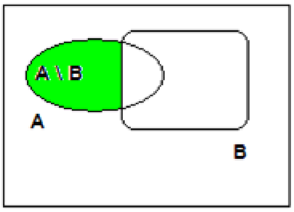
A union B . A eller B eller båda inträffar.

3.



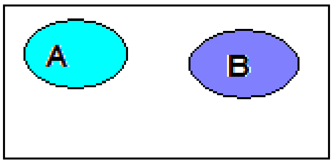
A snitt B. Både A och B inträffar **.**

4.



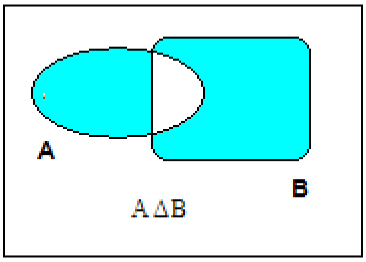
Differensen $A \setminus B \;= A \cap B^C$ **.**
A inträffar men inte B.

5.
Disjunkta



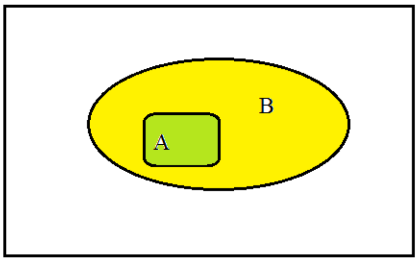
$\boldsymbol{A} \;\cap \boldsymbol{B} = \emptyset$
(oförenliga) händelser.
De kan inte inträffa samtidig.

6.



Symmetrisk differens.
Exakt en av A, B inträffar.

7.



A är delmängd till B betecknas $A \subseteq B$

(A inträffar) $\Rightarrow$(B inträffar)

Sambandet mellan mängdoperationer och händelser.

Operation	Mängdbeteckning	Beskrivning
Komplement	A^c	A inträffar inte
Snittet	$A \cap B$	Både A och B inträffar
Unionen	$A \cup B$	A eller B eller båda inträffar
Differensen	$A \setminus B \ = A \cap B^C$	A men inte B inträffar
Symmetrisk differens	$A \,\Delta\, B =$ $(A \cap B^C) \cup (B \cap A^c)$	Exakt en av A, B inträffar

VIKTIGA EGENSKAPER

==

Kolmogorovs axiom:

Axiom 1 $P(A) \geq 0$

Axiom 2 $P(\Omega) = 1$,

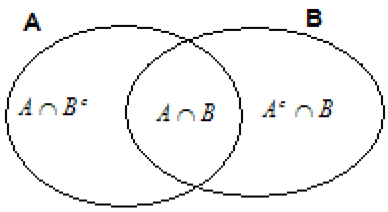
Axiom 3 Om A och B är **disjunkta** händelser dvs $A \cap B = \emptyset$ då
$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$

==

Från axiom 1,2, 3 följer följande egenskaper:

i) $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
ii) $0 \leq P(A) \leq 1$
iii) $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ monotoni
iv) $P(A^C) = 1 - P(A)$ sannolikheten för komplementhändelsen

Viktig: Om A och B **inte är disjunkta** då beräknas sannolikheten för **unionen** enligt följande
$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$



==

DE MORGANS LAGAR

De Morgans lagar är två regler som inom logiken formuleras enligt följande:

1. inte(P eller Q) = (inte P) och (inte Q)

2, inte(P och Q) = (inte P) eller (inte Q)

Motsvarande lagar inom mängdlära är:

1. $(A_1 \cup A_2)^C = A_1^{\ C} \cap A_2^{\ C}$
2. $(A_1 \cap A_2)^C = A_1^{\ C} \cup A_2^{\ C}$

Detta kan generaliseras till

De Morgans lagar:
L1. Komplement till unionen: $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^C = A_1^{\ C} \cap A_2^{\ C} \cap \cdots \cap A_n^{\ C}$
L2. Komplement till snittet: $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)^C = A_1^{\ C} \cup A_2^{\ C} \cup \cdots \cup A_n^{\ C}$

Genom att använda komplement på båda sidorna i L1 får vi följande nyttiga formel för unionen: (Vi skriver unionen som ett komplement till snittet)

L3. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = (A_1^{\ C} \cap A_2^{\ C} \cap \cdots \cap A_n^{\ C})^C$

och från L2 får vi

L4 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = (A_1^{\ C} \cup A_2^{\ C} \cup \cdots \cup A_n^{\ C})^C$

(I L4 uttrycker vi snittet som ett komplement till unionen.)

===

ÖVNINGAR:

Uppgift 1.

För händelserna A och B gäller $P(A) = 0.6$, och $P(B) = 0.3$ och $P(A^C \cap B) = 0.2$.

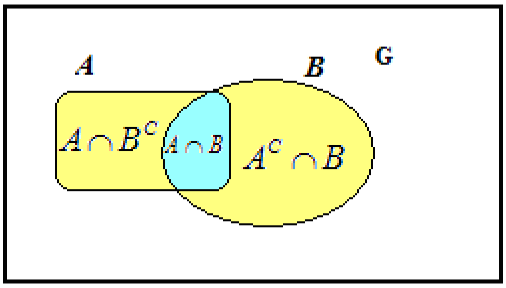
a) Bestäm $P(A \cap B^C)$.

b) Bestäm $P([A \cap B^C]^C)$

c) Bestäm $P([A^C \cap B^C]^C)$

d) Avgör om A och B är oberoende händelser.

Lösning:



a) $P(A \cap B) = P(B) - P(A^C \cap B) = 0.3 - 0.2 = 0.1$

$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.1 = 0.5$

b) $P([A \cap B^C]^C) = 1 - 0.5 = 0.5$

c) $P([A^C \cap B^C]^C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8$

d) Två händelser A och B är oberoende om och endast om $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$.

$P(A) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18$

$P(A \cap B) = 0.1$

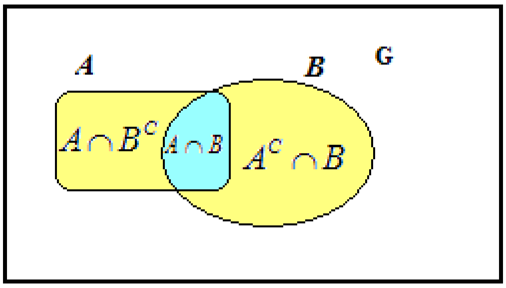
Svar d) A och B är inte oberoende eftersom $P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B)$

Uppgift 2.

En bilverkstad har kommit fram till att bilar av ett visst märke kan ha följande motorfel. Sannolikheten för att en slumpmässigt vald bil har fel typ A resp. B är 0,6 och 0,3. Sannolikheten att en bil har fel typ A, men inte fel typ B är 0,36.

Beräkna sannolikheten för att en slumpmässigt vald bil av märket ifråga har båda feltyperna.

Lösning.



a) $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^C) = 0{,}6 - 0{,}36 = 0{,}24$

Uppgift 3.

För två händelser A och B gäller: P(A)=0,6 , P(B)=0,5 och $P(A \cup B) = 0{,}7$.

a) Beräkna $p(A^C \cap B)$.

b) Beräkna $p(A^C \cap B^C)$.

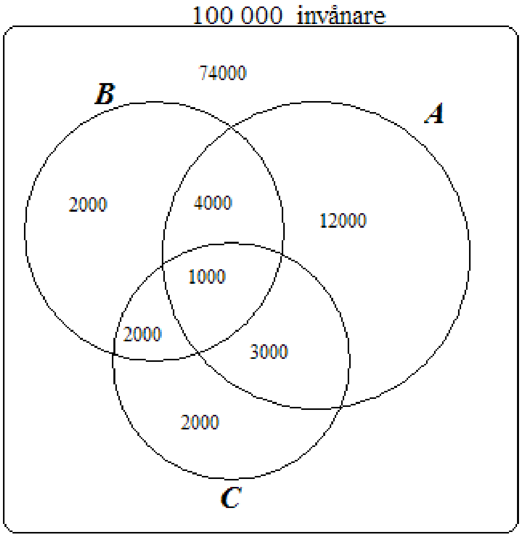
Svar. a) $P(A^C \cap B) = 0{,}1$ b) $P(A^C \cap B^C) = 0{,}3$

Uppgift 4.
I en stad med 100 000 invånare finns det 3 lokala tidningar A, B och C.
Vid en undersökning får man att

20 000 invånare (totalt) läser tidningen A	5 000 läser både A och B
9 000 läser B	4 000 läser både A och C
8 000 läser C	3 000 läser både B och C

1000 läser alla tre: A, B och C
Hur stor är sannolikheten att en slumpmässigt vald invånare i staden läser
a) tidningarna A och C men inte B ?
b) minst en av tidningarna A, B, C ?
c) ingen av tidningarna A, B, C.

Lösning:
Vi använder följande mängddiagram:



a) A och C men inte B läser 4 000-1000=3000 invånare.
Därför Pa=3000/100000=0.03=3%
b) minst en av tidningarna A, B, C läser 20000 +2 000+2000+2000=26000 invånare.
Därför Pb=26000/100000=0.26=26%
c) 74 000 invånare läser inte någon av tidningarna A, B, C
Alltså Pc=74000/100000=0.74=74%

Svar: a) 3% **b)**26% **c)** 74%

Uppgift 5.
I Estad som har 60000 invånare görs en tittarundersökning för nyhetsprogram i TV:

24000 ser Rapport
16000 ser Aktuellt
12000 ser Nyheterna
1000 ser alla tre programmen
14000 ser både Rapport och Aktuellt
9000 ser både Rapport och Nyheterna
2000 ser både Aktuellt och Nyheterna

Hur stor är sannolikheten att en slumpmässigt vald invånare i Estad ser minst en av de tre nyhetsprogrammen?

Lösning:

$A: \text{Ser Rapport}, \ B = \text{Ser Aktuellt}, C: \text{Ser Nyheterna}$

$\text{Sökt}: P(A \cup B \cup C)$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{24000}{60000} + \frac{16000}{60000} + \frac{12000}{60000} - \frac{14000}{60000} - \frac{9000}{60000} - \frac{2000}{60000} + \frac{1000}{60000} = 0{,}467$$

Uppgift 6.
De sex sidorna på en tärning är märkta med 1,2,3,4,5 och 6. Man kastar två **tärningar samtidigt** och beräknar summan av resultat.
Bestäm sannolikheten att
a) summan är 8.
b) summan är mindre än 5.

Lösning:
När man kastar två tärningar samtidigt kan man få följande 36 fall:
(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)
(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

a) Summan är 8 i följande 5 fall (6,2), (5,3), (4,4), (3,5), och (2,6)
Sannolikheten Pa= g/n= 5/36
b) Summan är mindre än 5 i följande 6 fall
(1,1), (1,2), (1,3),
(2,1), (2,2),
(3,1),
Sannolikheten Pb= g/n= 6/36=1/6
Svar a) 5/36 b) 1/6

DE MORGANS LAGAR:

Uppgift 7. Använd De Morgans lagar

L1. Komplement till unionen: $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)^C = A_1{}^C \cap A_2{}^C \cap \cdots \cap A_n{}^C$

L2. Komplement till snittet: $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)^C = A_1{}^C \cup A_2{}^C \cup \cdots \cup A_n{}^C$

L3. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = (A_1{}^C \cap A_2{}^C \cap \cdots \cap A_n{}^C)^C$

och förenkla

a) $(A \cup B^C \cup D^C)^C$ b) $(M^C \cap N \cap P^C)^C$

Lösning: a) $(A \cup B^C \cup D^C)^C = A^C \cap (B^C)^C \cap (D^C)^C = A^C \cap B \cap D$

b) $(M^C \cap N \cap P^C)^C = (M^C)^C \cup N^C \cup (P^C)^C = M \cup N^C \cup P$

Svar: a) $A^C \cap B \cap D$ b) $M \cup N^C \cup P$

Uppgift 8. Använd De Morgans lag L3 och skriv följande unioner som snitt

a) $M \cup N^C \cup P^C \cup Q$ b) $M \cup N \cup P^C \cup Q^C \cup R$

Lösning: a) $M \cup N^C \cup P^C \cup Q =$ (eligt L3) $= (M^C \cap (N^C)^C \cap (P^C)^C \cap Q^C)^C$

$= (M^C \cap N \cap P \cap Q^C)^C$

Svar b) $= (M^C \cap N^C \cap P \cap Q \cap R^C)^C$

DRAGNING MED HÄNSYN TILL ORDNING

Uppgift 9. Vi har 20 produkter, 5 av typ A , 6 av typ B och 9 av typ C och väljer 4 av de på måfå **utan** återläggning.
Hur stor sannolikheten är att vi får produkter
a) **i ordningen** A, B, A, B?
b) **i ordningen** A, A, C, A

Lösning:
Dragning1: Sannolikheten att få A i första dragningen är 5/20.
Dragning2: [Notera att vi har kvar 19 produkter (dragning utan återläggning) ; 6 av dem är av typ B].
Sannolikheten att få B i andra dragningen är 6/19
Dragning 3: [Notera att vi har kvar 18 produkter (dragning **utan återläggning**) ; 4 av dem är av typ A].
Sannolikheten att få A i tredje dragningen är 4/18
Dragning 4: [Notera att vi har kvar 17 produkter (dragning utan återläggning) ; 5 av dem är av typ B].

Sannolikheten att få B i fjärde dragningen är 5/17

Alltså P(A , B, A, B) (med hänsyn till ordning **utan** återläggning)= $\frac{5}{20}\cdot\frac{6}{19}\cdot\frac{4}{18}\cdot\frac{5}{17}=0.0052$

Svar:
a) P(A , B, A, B)= (med hänsyn till ordning **utan** återläggning)=0.0052
b) P(A , A, C,A)=$\frac{5}{20}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{9}{18}\cdot\frac{3}{17}=$ 0.00464

Uppgift 10.
Vi har 20 produkter, 5 av typ A , 6 av typ B och 9 av typ C och väljer 4 av de på måfå **med** återläggning.
Hur stor sannolikheten är att vi får produkter
a) **i ordningen** A, B, A, B?
b) **i ordningen** A, A, C, A
Lösning:
Dragning1: Sannolikheten att få A i första dragningen är 5/20.
Dragning2: [Notera att vi lämnar A tillbaka så att vi har samma situation igen dvs vi har med 20 produkter (dragning **med återläggning**) ; 6 av dem är av typ B].
Sannolikheten att få B i andra dragningen är 6/20
Dragning 3:
Sannolikheten att få A i tredje dragningen är 5/20
Dragning 4:
Sannolikheten att få B i fjärde dragningen är 6/20

Alltså P(A , B, A, B) (med hänsyn till ordning och **med** återläggning)= $\frac{5}{20}\cdot\frac{6}{20}\cdot\frac{5}{20}\cdot\frac{6}{20}$
=0.005625
Svar:
a) P(A , B, A, B) (med hänsyn till ordning och **med** återläggning) = 0.005625
b) P(A , A, C,A)=$\frac{5}{20}\cdot\frac{5}{20}\cdot\frac{9}{20}\cdot\frac{5}{20}$ = 0.00703

DRAGNING UTAN HÄNSYN TILL ORDNING

Uppgift 11. Bland 20 produkter finns 6 defekta. Man tar 5 produkter på måfå utan återläggning och utan hänsyn till ordning.
Vad är sannolikheten att få
a) exakt 3 korrekta (och därmed 2 defekta) i vilken ordning som helst?
b) alla 5 defekta?

Lösning a)
Antalet gynnsamma fall:

Vi kan välja 3 korrekta bland 14 och samtidigt 2 defekta bland 6 på g= $\binom{14}{3}\cdot\binom{6}{2}$ sätt

Antalet alla möjliga fall:

Vi kan välja 5 produkter bland 20 på N= $\binom{20}{5}$ sätt

Därmed blir den sökta sannolikheten $P = \frac{g}{N} = \frac{\binom{14}{3} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{20}{5}}$

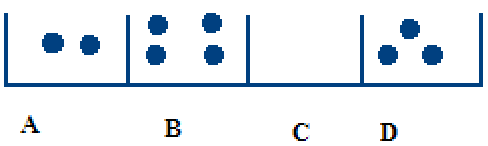
Svar:

a) $\frac{\binom{14}{3} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{20}{5}}$ (=0.352)

b) $\frac{\binom{14}{0} \cdot \binom{6}{5}}{\binom{20}{5}}$ (=0.000387)

===

Uppgift 12.
Vi placerar slumpvis 9 identiska bollar i 4 stora lådor A, B, C och D .
(Ett exempel på placering)



a) På hur många olika sätt kan man göra det?
b) Bestäm sannolikheten att ingen låda är tom.
Lösning a)
Vi betraktar ett ekvivalent problem:
Permutationer av 5 bokstäver I och 9 bokstäver O (se bilden).
T ex: Permutationen IOOIOOOOIIOOOI svarar mot ovanstående exempel.
Varje permutation **måste börja och sluta med I** (annars hamnar inte bollen i någon låda)
Därför "permuterar" vi 3 bokstäver I och 9 bokstäver O.

a) Det finns $N = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1} = 220$ sådana permutationer.

Svar a) 220

b)

Ingen låda är tom om det finns minst en boll i varje låda. Resten, d v s 5 bollar, kan placeras på godtyckligt sätt. Detta betyder att vi permuterar fritt 3 bokstäver I och 5 bokstäver O.

Det finns $k = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56$ sådana permutationer.

Om vi antar att alla placeringar är lika sannolika då gäller:

Sannolikheten att ingen låda är tom $= \frac{k}{N} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$

Svar b) $p = \frac{14}{55}$