STOKASTISKA VARIABLER

Resultat till ett försök är ofta ett **tal**. Talet kallas **en stokastisk variabel (**kortare **s. v.).**

Definition 1. En reellvärd funktion definierad på ett utfallsrum Ω kallas en (endimensionell) stokastisk variabel.

Stokastiska variabler betecknas oftast med versaler X, Y, Z,... eller med grekiska bokstäver, ξ (ksi eller xi) , η (eta) , ζ (zeta).

Exempel: I en låda finns fem lappar med talet 40, tre lappar markerade med 80 och 12 lappar markerade med 90. Vi tar ut en lapp på måfå. Möjliga utfall är följande **reella tal** 40, 80 ,90. Vi betecknar resultat med X. Då är X **en stokastisk variabel**.
Sannolikheten att X får värdet x betecknar vi med P(X=x).
T ex P(X=40)=5/20 eller P(X=80)=3/20. I det här fallet (ändligt antal möjliga utfall) kan vi ange alla möjliga resultat med motsvarande sannolikheter:

X	**40**	**80**	**90**
P(X=x)	**5/20**	**3/20**	**12/20**

DISKRETA STOKASTISKA VARIABLER

Definition 2 En stokastisk variabel kallas DISKRET om den antar numrerbart (=uppräkneligt) antal olika värden.

Sannolikhetsfördelning för en **diskret** stokastisk variabel oftast anges med en tabell:

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$	
$P(\xi = x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$	

$$\sum_k p_k = 1$$

Definition 3. Låt ξ vara en diskret stokastisk variabel. Funktionen $p(x) = P(\xi = x)$ kallas **sannolikhetsfunktionen** till ξ**.**

Definition 4. Låt ξ vara en diskret stokastisk variabel. Följande funktion

$$F(x) = P(\xi \le x)$$

kallas **fördelningsfunktionen** för ξ.

För en diskret s.v. kan fördelningsfunktionen bestämmas genom att addera alla p_k för de x_k som är mindre eller lika med x:

$$F(x) = \sum_{x_k \le x} p(x_k)$$

==

VÄNTEVÄRDE OCH VARIANS för diskreta s.v.

VÄNTEVÄRDET för en diskret s.v. ξ betecknas m, µ eller $E(\xi)$, och definieras som

$$E(\xi) = \sum_k x_k \cdot p_k$$

där $p_k = P(\xi = x_k)$

VARIANSEN för en diskret s.v. ξ betecknas $V(\xi)$, Var, σ^2 eller s^2 och definieras som

$$V(\xi) = \sum_k (x_k - m)^2 \cdot p_k$$

STANDARDAVVIKELSEN för en diskret s.v. ξ betecknas σ eller s och definieras som

$$\sigma = \sqrt{Variansen}$$

NÅGRA VIKTIGA DISKRETA FÖRDELNINGAR

Fördelning	**Sannolikhetsfunk.** $P(\xi = x)$	**Väntevärde**	**Varians**
Binomial Bin(n,p)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ $x = 0,1,\ldots,n$	np	$np(1-p)$
Poisson $Po(\lambda)$	$e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$ $x = 0, 1, 2, 3\ldots$	λ	λ
Hypergeometrisk Hyp(N,n,p) $N=N_1+N_2$ $p = N_1/N$	$\dfrac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	np	$\dfrac{np(1-p)(N-n)}{N-1}$

==

ÖVNINGSUPPGIFTER

Uppgift 1.

I nedanstående tabell finns sannolikhetsfördelning för en diskret stokastisk variabel ξ.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
ξ	3	4	5	8	10
$P(\xi = x)$	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3

a) Bestäm väntevärdet och variansen och standardavvikelsen för ξ.
b) Rita stolpdiagrammet för tillhörande sannolikhetsfunktion $p(x) = P(\xi = x)$.
c) Bestäm och rita grafen till fördelningsfunktion $F(x) = P(\xi \le x)$.
d) Beräkna följande sannolikheter:
$P(4 \le \xi \le 8)$, $P(4 < \xi \le 8)$, $P(4 \le \xi < 8)$, $P(4 < \xi < 8)$,
$P(\xi \le 8)$, $P(\xi < 8)$, $P(4 < \xi)$, $P(4 \le \xi)$,
$P(\xi \le 10)$, $P(\xi > 10)$, $P(\xi \le -3)$, $P(\xi > -3)$.

Lösning:

a) VÄNTEVÄRDET:

$$\boldsymbol{m} = E(\xi) = \sum_k x_k \cdot p_k = 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 + 5 \cdot 0.3 + 8 \cdot 0.1 + 10 \cdot 0.3 = 6.3$$

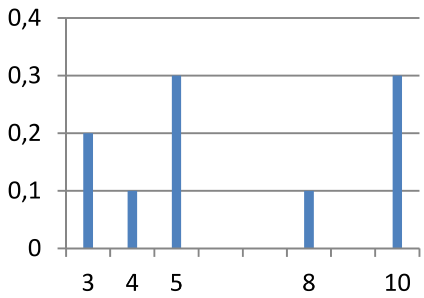
VARIANSEN: $V(\xi) = \sum_k (x_k - m)^2 \cdot p_k =$

$(3-6.3)^2 \cdot 0.2 + (4-6.3)^2 \cdot 0.1 + (5-6.3)^2 \cdot 0.3 + (8-6.3)^2 \cdot 0.1 + (10-6.3)^2 \cdot 0.3 = 7.61$

STANDARDAVVIKELSEN :

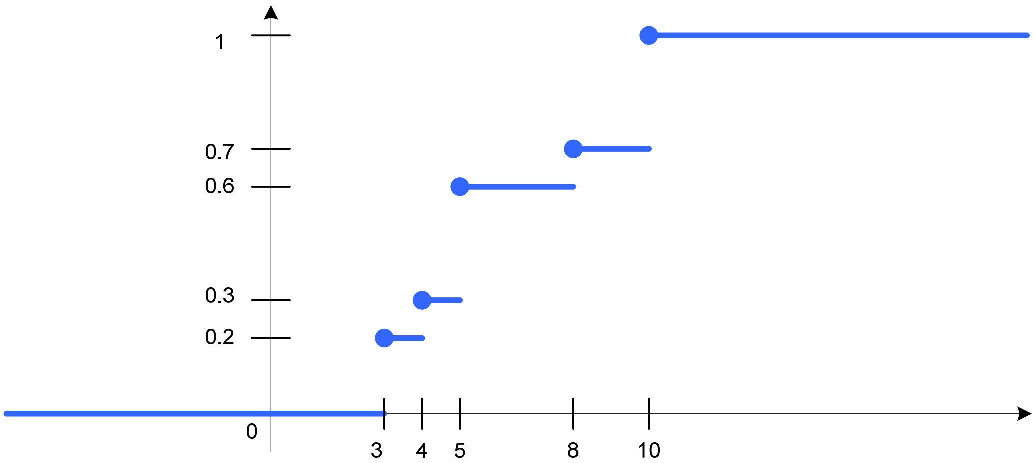
$$\sigma = \sqrt{Variansen} = \sqrt{7.61} = 2.7586$$

b) Grafen till sannolikhetsfunktionen $p(x)$ (stolpdiagram)



c) Fördelningsfunktion $F(x) = P(\xi \le x)$ bestäms av kumulativa sannolikheter:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 3 \\ 0.2 & \text{om } 3 \le x < 4 \\ 0.3 & \text{om } 4 \le x < 5 \\ 0.6 & \text{om } 5 \le x < 8 \\ 0.7 & \text{om } 8 \le x < 10 \\ 1 & \text{om } 10 \le x \end{cases}$$



Grafen till fördelningsfunktionen $F(x)$

d) Från tabellen

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
ξ	3	4	5	8	10
$P(\xi = x)$	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3

får vi:

$P(4 \le \xi \le 8) = 0.1 + 0.3 + 0.1 = 0.5$,

$P(4 < \xi \le 8) = 0.3 + 0.1 = 0.4$,

$P(4 \le \xi < 8) = 0.1 + 0.3 = 0.4$,

$P(4 < \xi < 8) = 0.3$,

$P(\xi \le 8) = 0.2 + 0.1 + 0.3 + 0.1 = 0.7$,

$P(\xi < 8) = 0.2 + 0.1 + 0.3 = 0.6$,

$P(4 < \xi) = 0.3 + 0.1 + 0{,}3 = 0.7$,

$P(4 \le \xi) = 0.1 + 0.3 + 0.1 + 0.3 = 0.8$,

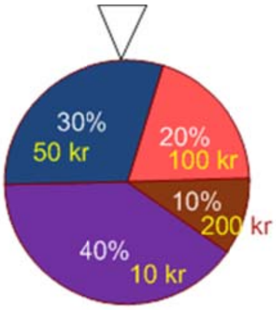
$P(\xi \le 10) = 1$,

$P(\xi > 10) = 0$,

$P(\xi \le -3) = 0$,

$P(\xi > -3) = 1$.

Uppgift 2. Studentkåren på KTH organiserar en spelkväll med nedanstående lyckohjul.



Om hjulet stannar t. ex. på den blå färgen (sannolikheten för detta = 0.30) då får spelaren 50 kr.

a) Bestäm priset per ett spel om studentkåren vill (approximativt) varken vinna eller förlora pengar under kvällen (dvs om de förväntar nettoresultat=0 kr)
b) Man antar att kåren säljer 500 spel under kvällen. Bestäm priset per ett spel om studentkåren vill ha (approximativt) total nettovinst = 5000 kr i slutet av spelkvällen.

Lösning. Vi kan betrakta resultat (i ett spel) som en stokastisk variabel X med följande sannolikhetsfördelning

X	10	50	100	200
P(X=x)	0.40	0.30	0.20	0.10

a) Vi bestämmer väntevärdet för X som visar (approximativt) hur mycket en spelare får i genomsnitt per ett spel.
$E(X) = x_1 p_1 + \cdots + x_4 p_4$ =10·0.40+50·0.30+100·0.20+200·0.10=4+15+20+20=59 kr.

b) Om man vill tjäna totalt 5000 kr denna kväll (med 500 spel) då blir 5000/500=10 kr nettovinst per spel.
Därmed är det sökta priset lika med 59+10=69 kr.

Svar: a) 59 kr. b) 69

Uppgift 3. (Hypergeometrisk fördelning)
Bland 15 produkter finns 5 defekta. Man väljer på måfå 4 produkter.
Bestäm sannolikheten att få
a) ingen defekt
b) exakt en defekt
c) minst en defekt.

Lösning:

a)

$$\frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{10}{4}}{\binom{15}{4}} = \frac{2}{13} = 0.1538$$

b)

$$\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{10}{3}}{\binom{15}{4}} = 0.43956$$

c)

$$\mathbf{1} - \frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{10}{4}}{\binom{15}{4}} = \mathbf{1} - \frac{2}{13} = 0.8462$$

Binomialfördelning

Låt A vara en händelse som inträffar med sannolikheten **p** vid ett försök.

A	A^C
$P(A) = p$	$P(A^C) = q \quad (= 1 - p)$

Vi upprepar försöket ***n*** gånger och kollar hur många gånger A inträffar.

Låt ξ vara antalet gånger A inträffar vid n försök.

Då gäller

$$P(\xi = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, n.$$

Vi säger att variabeln ξ är **binomialfördelad** med parametrar n och p och betecknar

$$\xi \in Bin(n, p).$$

Man betecknar ofta $1 - p = q$. Föregående formel kan då skrivas kortare

$$P(\xi = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, n.$$

För en **binomialfördelad** s. v. ξ med parametrar *n* (antalet upprepningar av ett försök A) och *p* (sannolikheten för ett försök A) gäller följande formler

Väntevärdet: $E(\xi) = np$

Variansen: $V(\xi) = npq$

och standardavvikelsen: $\sigma = \sqrt{npq}$

Uppgift 4. (Binomialfördelning)
Vi planerar att producera 10 st produkter i en maskin. Sannolikheten för att en produkt blir defekt är 5%.
Bestäm sannolikheten att få
a) exakt 1 defekt produkt
b) högst 1 defekt produkt
c) minst 1 defekt
d) ingen defekt
e) alla defekta

Lösning: Antalet defekta är en s. v. som vi betecknar med ξ.
Variabeln är binomialfördelad med parametrar
$n = 10$ och $p = 0.05$ (och $q = 1 - p = 0.95$),
som vi betecknar $\xi \in Bin(10, 0.05)$

a) Sannolikheten att få exakt 1 defekt produkt är

$$p_1 = P(\xi = 1) = \binom{10}{1} p^1 q^9 = 0.3151$$

b) Sannolikheten för högst 1 defekt produkt är $p_0 + p_1$ där

$$p_0 = P(\xi = 0) = \binom{10}{0} p^0 q^{10} = 0.5987$$

(p_1 har vi beräknat i a)
Därför gäller att P(högst en defekt) = $p_0 + p_1 = 0.9139$.

c) $P(\textit{minst en defekt}) = p_1 + p_2 + \cdots p_n$
Eftersom $p_0 + p_1 + p_2 + \cdots p_n = 1$ har vi
$P(\textit{minst en defekt}) = p_1 + p_2 + \cdots p_n = 1 - p_0 = 1 - 0.5987 = 0.4013$

d) Sannolikheten för ingen defekt är

$$p_0 = P(\xi = 0) = \binom{10}{0} p^0 q^{10} = 0.5987$$

e) Sannolikheten för alla defekta är

$$p_{10} = P(\xi = 10) = \binom{10}{10} p^{10} q^0 = 9.766 \cdot 10^{-14}$$

Svar: a) 0.3151 b) 0.9139 c) 0.4013
d) 0.5987 e) $9.766 \cdot 10^{-14} \approx 0$

Poissonfördelning.

Poissonfördelningen används oftast i modeller som beskriver antalet oberoende händelser under ett tidsintervall.
Om för en stokastisk variabel ξ gäller

$$P(\xi = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \qquad \textit{där } x = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots.$$

då säger vi att ξ är Poissonfördelad med parameter λ och skriver $\xi \in Po(\lambda)$.
För en **Poissonfördelad** s. v. med parameter λ gäller följande formler
Väntevärdet: $E(\xi) = \lambda$
Variansen: $V(\xi) = \lambda$
och standardavvikelsen: $\sigma = \sqrt{\lambda}$

==============================
APPROXIMATION av Bin(n,p) med $Po(\lambda)$.
Om n är stor och p litet (**tumregel** $n > 10,\ p < 0.1$) i en binomialfördelning Bin(n,p) då kan fördelningen Bin(n,p) **approximeras** med Poissonfördelningen $Po(\lambda)$ med $\lambda = np$.

Uppgift 5. (Poissonfördelning)
Till en telefonväxel ankommer i genomsnitt 90 anrop per timme. Vi antar att ankomster är Poissonfördelade. Bestäm sannolikheten att exakt 2 anrop kommer under ett tidsintervall som är en minut långt.

Lösning.
Viktigt: Parameter λ i en Poissonfördelad s.v. ξ är lika med väntevärdet $E(\xi)$.
Vi har i genomsnitt 90 ankomster per timme och därför 90/60=1.5 ankomster per minut.
Vi betecknar antalet ankomster per minut med λ. Då är $\xi \in Po(\lambda)$.
där $\lambda = 1.5$ ankomster per minut. Vi använder formeln

$$P(\xi = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda},$$

och substituerar $\lambda = 1.5$ och $x = 2$.

$$P(\xi = 2) = \frac{1.5^2}{2!} e^{-1.5} = 0.2510$$

Uppgift 6. (APPROXIMATION. Binomialfördelning, Poissonfördelning)

Man ska tillverka 1000 produkter. Vad är sannolikheten att få exakt 2 defekta produkter bland 1000, om felsannolikheten (sannolikheten att en produkt blir defekt) är 0.003.
Lösning:
Låt ξ beteckna antalet defekta produkter. Då gäller

$$\xi \in Bin(1000, 0.003).$$

Metod 1. Vi beräknar sannolikheten direkt (binomialfördelningen)

$$P(\xi = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, n.$$

dvs

$$p_2 = \binom{1000}{2} p^2 (1-p)^{998} = 0.2242$$

Metod 2. Vi kan **approximera** sannolikheten med hjälp av Poissonfördelningen med parameter $\lambda = np = 1000 \cdot 0.003 = 3$.

$$P(\xi = x) \approx \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \frac{3^2}{2!} e^{-3} = 0.2240$$