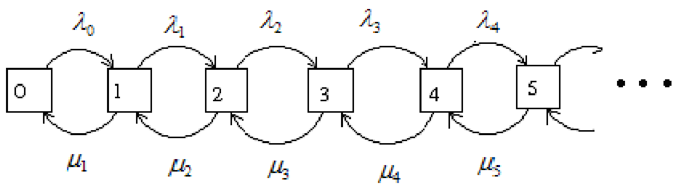
FÖDELSE – DÖDSPROCESSER

En födelse-dödsprocess är en kontinuerlig Markovkedja som karakteriseras av att endast övergångar mellan närmaste tillstånd är tillåtna som i nedanstående figur.



Motsvarande Q-matrisen är

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0\cdots \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & 0\cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & 0\cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\mu_3+\lambda_3) & \lambda_3\cdots \\ .... & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Konstanter $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ kallas födelseintensiteter medan $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ är dödsintensiteter.

En födelse-dödsprocess kan ha ändligt eller oändligt antal tillstånd.

Den stationära sannolikhetsvektorn $\vec{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3, \ldots)$ får vi ur systemet

$\vec{p}Q = \vec{0}$, (ekv a)

$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = 1$ (ekv b)

Från (ekv a) har vi

$-\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 = 0$, (ekv 1)

$\lambda_0 p_0 - (\mu_1 + \lambda_1) p_1 + \mu_2 p_2 = 0$, (ekv 2)

$\lambda_1 p_1 - (\mu_2 + \lambda_2) p_2 + \mu_3 p_3 = 0$ (ekv 3)

$\lambda_2 p_2 - (\mu_3 + \lambda_3) p_3 + \mu_4 p_4 = 0$ (ekv 4)

……

Ovanstående system är ekvivalent med följande system:

$-\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 = 0$, ekv A (=ekv 1)

$-\lambda_1 p_1 + \mu_2 p_2 = 0$, ekv B (= ekv A+ ekv 2)

$-\lambda_2 p_2 + \mu_3 p_3 = 0$ ekv C (=ekv B+ ekv 3)

$-\lambda_3 p_3 + \mu_4 p_4 = 0$ ekv D (=ekv C+ ekv 3)

Från ekv A, B, C, D… kan vi uttrycka sannolikheterna p_1, p_2, p_3,... med hjälp av p_0

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0,$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} p_0,$$

$$p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} p_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3} p_0$$

….

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} p_{n-1} = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{(n-1)}}{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n} p_0$$

Alltså $$\boxed{p_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{(n-1)}}{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n} p_0}$$

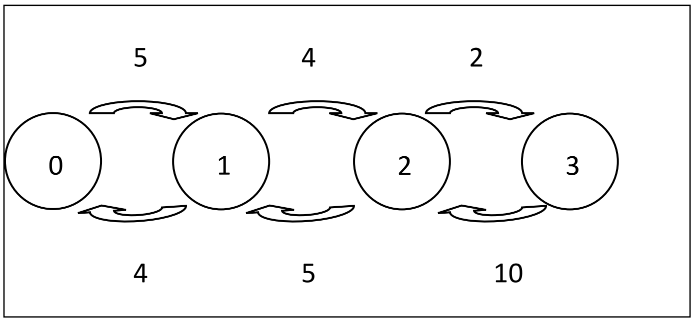
Vi substituerar $p_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{(n-1)}}{\mu_1\mu_2\mu_3\cdots\mu_n} p_0$, n=0, 1, 2, 3…i ekvationen

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = 1,$$

och får p_0.

ÖVNINGAR

Uppgift 1. En ändlig födelse-dödsprocess definieras nedan.



a) Bestäm p_0, p_1, p_2, p_3

Lösning:

Först uttrycker vi p_1, p_2, p_3 som funktioner av p_0:

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 = \frac{5}{4} p_0 = 1.25 p_0 \qquad (*)$$

$$p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0 = \frac{5 \cdot 4}{4 \cdot 5} p_0 = 1 p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} p_0 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 2}{4 \cdot 5 \cdot 10} p_0 = 0.2 p_0$$

För att bestämma p_0 substituerar vi (*) i villkoret $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Vi får $p_0 + 1.25 p_0 + 1 p_0 + 0.2 p_0 = 1$.

Härav $3.45 p_0 = 1$ och därför $p_0 = \frac{1}{3.45} = 0.2898550725$.

Vi har beräknat $p_0 = 0.2898550725$. Med hjälp av (*) är det nu enkelt att beräkna alla andra sannolikheter p_k:

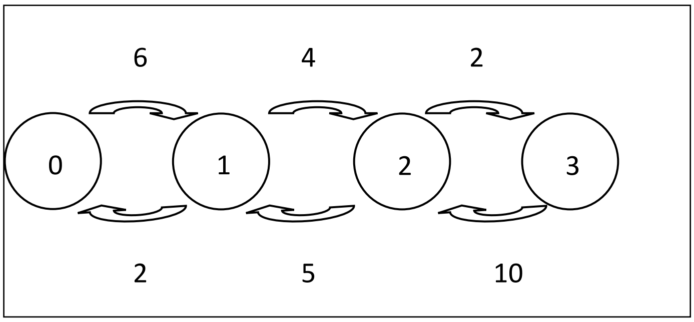
$p_1 = 1.25 p_0$ =0.3623188406

$p_2 = 1 p_0$ =0.2898550725

$p_3 = 0.2 p_0$ =0.05797101449

Svar: (p_0, p_1, p_2, p_3)=(0.2898550725, 0.3623188406 ,0.2898550725, 0.05797101449)

Uppgift 2. Ett kösystem med max 3 kunder kan modelleras som en födelse-dödsprocess vars diagram är



a) Beräkna p_0, p_1, p_2, p_3

b)Beräkna medelantal kunder i systemet.

Tips: Medelantal kunder i systemet N= $0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3$.

Svar:

a) (p_0, p_1, p_2, p_3)=(0.1453488372, 0.4360465116, 0.3488372093, 0.06976744186)

b) N= 1.343023256

Uppgift 3. Betrakta en födelse- dödsprocess med oändligt många tillstånd.

Födelseintensiteter λ_i och dödsintensiteter μ_i är definierade enligt nedan.

i) Bestäm den stationära sannolikhetsvektorn.
ii) Bestäm (den stationära) sannolikheten att processen är i tillstånd 3

a) $\begin{array}{ll} \lambda_i = 20, & i = 0,1,2,3,\ldots \\ \mu_i = 25, & i = 1,2,3,\ldots \end{array}$

b) $\begin{array}{ll} \lambda_i = 6, & i = 0,1,2,3,\ldots \\ \mu_i = 8, & i = 1,2,3,\ldots \end{array}$

c) $\begin{array}{ll} \lambda_i = 10, & i = 0,1,2,3,\ldots \\ \mu_i = 40, & i = 1,2,3,\ldots \end{array}$

Tips. Använd formeln för den oändliga geometriska summan

$1+x+x^2+x^3+\ldots=\dfrac{1}{1-x}$ som gäller om $|x|<1$.

Lösning a:

Först uttrycker vi p_1, p_2, p_3,... som funktioner av p_0:

$$p_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}p_0=\frac{20}{25}p_0=\frac{4}{5}p_0 \qquad (*)$$

$$p_2=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}p_0=\frac{20\cdot 20}{25\cdot 25}p_0=\left(\frac{4}{5}\right)^2 p_0$$

$$p_3=\frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}p_0=\frac{20\cdot 20\cdot 20}{25\cdot 25\cdot 25}p_0=\left(\frac{4}{5}\right)^3 p_0$$

För att bestämma p_0 substituerar vi (*) i villkoret

$p_0+p_1+p_2+p_3+\cdots=1$ och får

$$p_0+\frac{4}{5}p_0+\left(\frac{4}{5}\right)^2 p_0+\left(\frac{4}{5}\right)^3 p_0+\cdots=1 \ .$$

Vi bryter ut p_0

$$p_0\left(1+\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\cdots\right)=1$$

och använder formeln för den oändliga geometriska summan $1+x+x^2+x^3+\ldots=\dfrac{1}{1-x}$ med

$x=\dfrac{4}{5}$ (notera att $|x|<1$).

Vi får $p_0\left(\dfrac{1}{1-\frac{4}{5}}\right)=1$ och därmed $p_0=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$.

Med hjälp av (*) beräknar vi några p_k:

$$p_1=\frac{4}{5}p_0=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{25}$$

$$p_2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 p_0 = \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{5} = \frac{16}{125}$$

$$p_3 = \left(\frac{4}{5}\right)^3 p_0 = \frac{64}{625}$$

....

Svar:

a) i) $\vec{P} = (\frac{1}{5}, \frac{4}{25}, \frac{16}{125}, \frac{64}{625}, ...)$ ii) $p_3 = \frac{64}{625}$

b) i) $\vec{P} = (\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{9}{64}, \frac{27}{256}, ...)$ ii) $p_3 = \frac{27}{256}$

c) i) $\vec{P} = (\frac{3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{3}{64}, \frac{3}{256}, ...)$ ii) $p_3 = \frac{3}{256}$