TVÅ STICKPROV

Vi betraktar två oberoende normalfördelade s.v. X och Y.
Låt $x_1,\ x_2,...,x_{n1}$ vara ett observerat stickprov , av storleken n_1, på $X \in N(\mu_1,\sigma)$ och
låt $y_1,\ y_2,...,y_{n2}$ vara ett observerat stickprov, av storleken n_2, på $Y \in N(\mu_2,\sigma)$.
Vi undersöker skillnad mellan X och Y genom att bestämma ett konfidensintervall för differensen mellan väntevärdena μ_X och μ_Y.

Två stickprov:
Konfidensintervall för $\mu_X - \mu_Y$ med konfidensgrad $1-\alpha$:

σ känt:

$$\left[\bar{x}-\bar{y}-\lambda_{\alpha/2}\cdot\sigma\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\quad \bar{x}-\bar{y}+\lambda_{\alpha/2}\cdot\sigma\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$$

σ okänt

$$\left[\bar{x}-\bar{y}-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\cdot\sigma^*\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\quad \bar{x}-\bar{y}+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\cdot\sigma^*\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$$

där $\sigma^* = \sqrt{\dfrac{(n_1-1)\sigma_x^2+(n_2-1)\sigma_y^2}{n_1-1+n_2-1}}$

==

ÖVNINGSUPPGIFTER

Uppgift 1.
Man undersöker betongelement från två fabriker A och B med avseende på en kvalitetsvariabel som anses normalfördelad med den **kända** standardavvikelsen, $\sigma = 0.1$.
Man har fått 5 observationer från A .

A	2.4	2.55	2.45	2.6	2.4

och 6 observationer från B

B	2.3	2.4	2.25	2.35	2.33	2.4

a) Ange ett 95% konfidensintervall för $\mu_A - \mu_B$ där μ_A och μ_B är medelvärdena för kvalitetsvariabeln hos A respektive B.

b) Kan man med 95% konfidensgrad påstå att det finns en skillnad mellan betongelement från A och B?

Lösning: Eftersom standardavvikelsen $\sigma = 0.1$ är **känd** använder vi formeln

$$\left[\bar{x}-\bar{y}-\lambda_{\alpha/2}\cdot\sigma\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\quad \bar{x}-\bar{y}+\lambda_{\alpha/2}\cdot\sigma\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right].$$

Vi beräknar $\bar{x}=2.480$, $\bar{y}$=2.338 och därmed $\bar{x}-\bar{y}=0.142$.

Dessutom $\alpha/2=2.5\%$, n_1=5 och n_2=6.

"Radien" $\lambda_{\alpha/2}\cdot\sigma\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}=1.96\cdot 0.1\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}=0.11868$

Konfidensintervallet blir då

$\left[\bar{x}-\bar{y}-\lambda_{\alpha/2}\cdot\sigma\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\quad \bar{x}-\bar{y}+\lambda_{\alpha/2}\cdot\sigma\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$= [0.1417–0.11868 ;
0.1417+0.11868]
= [0.023 ; 0.260]

Svar a) Ett 95% konfidensintervall för $\mu_A-\mu_B$ [0.023 ; 0.260]

b) Ja: Eftersom intervallet INTE innehåller 0 kan man med 95% konfidensgrad påstå att det finns en skillnad mellan A och B.

Uppgift 2.
Man vill jämföra två maskiner A och B med avseende på en viss kvalitetsvariabel hos de tillverkade enheterna. För båda maskinerna kan denna variabel antas vara normalfördelad med en **okänd** standardavvikelse. Man har 5 dagar i rad tillverkat ett antal enheter med maskinen A varvid man fått följande observationer.

A	21	25	24	22	23

Man har 6 dagar i rad tillverkat enheter med maskinen B varvid man fått följande observationer.

B	20	24	21	22	23	22

a) Ange ett 95% konfidensintervall för $\mu_A-\mu_B$ där μ_A och μ_B är medelvärdena för kvalitetsvariabeln hos A respektive B.

b) Kan man med 95% konfidensgrad påstå att det finns en skillnad mellan A och B?

Lösning: $\bar{x}=23$ s_1=1.58
$\bar{y}$ =22 s_2=1.414

$$\sigma^*=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1-1+n_2-1}}=1.49$$

$\alpha/2 = 2.5\%$
r = antal frihetsgrader= $n_1 - 1 + n_2 - 1$ =9

Konfidensintervall:

$$\left[\bar{x} - \bar{y} - t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\cdot\sigma^* \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \quad \bar{x} - \bar{y} + t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)\cdot\sigma^* \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right]$$

Eftersom
n_1 =5 , n_2 =6
$\bar{x} - \bar{y} = 1$
$\alpha/2 = 2.5\%$
$1 - \alpha/2 = 0.975$
och $t_{\alpha/2}(9) \approx$ 2,2622

får vi $t_{\alpha/2}(9)\cdot\sigma^* \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}$ =2.04.

Härav får vi för $\mu_A - \mu_B$ följande konfidensintervall: $[-1.04,\ 3.04]$

Svar. a) Konfidensintervall: $[-1.04,\ 3.04]$.
b) **Nej.** Eftersom intervallet innehåller 0 kan man INTE med 95% konfidensgrad påstå att det finns någon skillnad mellan A och B.

Uppgift 3. Vi testar två mätningsmetoder X och Y av en viss storhet. Resultaten anses normalfördelade.

Metod 1 ger följande resultat:

X	x_1	x_2	x_3	x_4
observationsvärden	40	42	43	42

Metod 2 ger följande resultat:

Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
observationsvärden	46	44	50	44	47	44

a) Bestäm en 95 % konfidensintervall för differensen mellan väntevärdena μ_X och μ_Y .
b) Kan man med 95% konfidensgrad påstå att det finns en skillnad mellan X och Y?

Lösning: $\bar{x} = 41.75 \qquad s_1 = 1.258$
$\bar{y} = 45.83 \qquad s_2 = 2.401$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 - 1 + n_2 - 1}} = 2.048$$

$\alpha/2 = 2.5\%$
r = antal frihetsgrader= $n_1 - 1 + n_2 - 1$ =8

Konfidensintervall:

$$\left[\bar{x}-\bar{y}-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\cdot\sigma^*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\quad \bar{x}-\bar{y}+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\cdot\sigma^*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right]$$

Eftersom

n_1 =4 , n_2 =6

σ^* =2.048

$\bar{x}-\bar{y}$= −4.083

och $t_{\alpha/2}(8)=2.306$,

får vi $t_{\alpha/2}(8)\cdot\sigma^*\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=3.05$

Härav får vi för $\mu_X-\mu_Y$ följande konfidensintervall: [–7.14, –1.04].

Svar a) Konfidensintervall: [–7.14, –1.04].
b)Ja: Eftersom intervallet INTE innehåller 0 kan man med 95% konfidensgrad påstå att det finns en skillnad mellan X och Y.

Uppgift 4. Vi testar två förpackningsmaskiner X och Y.

Test1: Från maskin X har vi följande 4 observationsvärden av paketens vikter i gram:

ξ	x_1	x_2	x_3	x_4
observationsvärden	51	52	51.5	48.5

Test2: Från maskin Y har vi följande 6 observationsvärden.

η	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
observationsvärden	51	49.5	50.5	48.5	49.5	49

a) Bestäm en 95 % konfidensintervall för differensen mellan väntevärdena μ_X och μ_Y.
b) Kan man med 95% konfidensgrad påstå att det finns en skillnad mellan X och Y?

Lösning: $m_1=50.75 \quad s_1=1.554563176$

$m_2=49.66666667 \quad s_2=0.9309493363$

$$\sigma^*=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1-1+n_2-1}}=1.203294090$$

$\alpha/2=2.5\%$

r = antal frihetsgrader= n_1-1+n_2-1 =8

Konfidensintervall:

$$\left[m_1 - m_2 - t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\cdot\sigma^*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\quad m_1 - m_2 + t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\cdot\sigma^*\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \right]$$

Eftersom

$n_1 = 4$, $n_2 = 6$

$\sigma^* = 1.203294090$

$m_1 - m_2 = 1.08333333$

och $t_{\alpha/2}(8) = 2.306$,

får vi $t_{\alpha/2}(8)\cdot\sigma^*\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = 1.79$.

Härav får vi för $\mu_X - \mu_Y$ följande konfidensintervall: $[-0.71,\ 2.87]$

Svar a) Konfidensintervall: $[-0.71,\ 2.87]$.

b) **Nej**, eftersom intervallet innehåller 0 kan man INTE med 95% säkerhet påstå att det finns någon skillnad mellan X och Y.