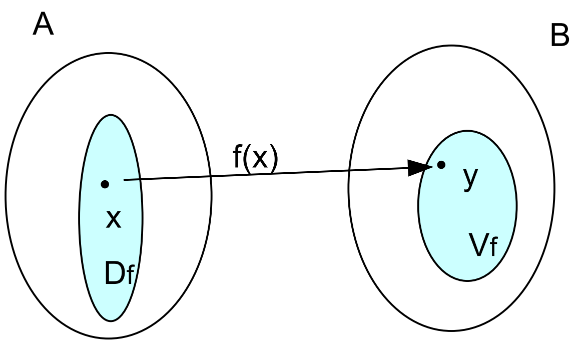
BIJEKTION, INJEKTION, SURJEKTION

NUMRERBARA (eller UPPRÄKNELIGA) MÄNGDER

Allmän terminologi.



I samband med variabelbyte vid beräkning av integraler har vi en avbildning mellan två mängder A och B, dvs en funktion $f : A \to B$. Vi har oftast krav att

varje element x i A har **precis en bild** *f*(x) i B och

att varje element i B har **precis ett original** i A.

Sådana avbildningar kallar vi **bijektioner**.

En bijektion mellan två mängder A och B som har ändligt antal element kan endast finnas om mängderna har samma antal element.

Om det finns en bijektion mellan två mängder A, B (ändliga eller oändliga) säger vi att de har lika **kardinalitet: (kardinaltal).**

Beteckning: Kardinaltalet för en mängd A betecknas oftast på en av följande sätt:

card (A), eller |A|.

Om det finns en bijektion mellan A och B då säger vi också att A och B är två **ekvivalenta** mängder och betecknar A ~B. Alltså om A och B är två ekvivalenta mängder har de samma kardinalitet, dvs.

$$A \sim B \iff |A|=|B|.$$

Om det finns en bijektion från A till en delmängd av B då skriver vi $|A| \leq |B|$.
Om $|A| \leq |B|$ och $|A| \neq |B|$ då skriver vi $|A| < |B|$.

Anmärkning: Man kan visa att för två mängder A och B gäller exakt en av följande tre relationer:

$|A| < |B|$, $|A| = |B|$ eller $|A| > |B|$.

i) Kardinaltalet till en ändlig mängd A är lika med antalet element i A.

T ex För A={12, 45, 34} har vi card(A)=3 (dvs A har 3 element)

ii) Kardinaltalet för mängden som är ekvivalenta med mängden av alla naturliga tal **N** = {0,1,2,3,....} kallas alef -0 (alef-noll).
Alef-noll är minst av alla kardinaltal som tillhör en oändlig mängd. Med andra ord, om A är en **oändlig** mängd då gäller

$$|N| \leq |A|.$$

iii) Kardinalitet för mängden av alla reella tal **R** betecknas oftast med *c*.

Man kan visa att c > alef-noll dvs att **R** inte är ekvivalent med **N**.

Exempel 1. Mängden av alla naturliga tal **N** = {0,1,2,3,....} är ekvivalent med mängden av alla naturliga jämna tal $\mathbf{N_2}$ = {2,4,6,8,....} dvs **N** och $\mathbf{N_2}$ har samma kardinalitet.

Bevis: Funktionen $f(n) = 2n$ är en bijektion mellan N och $\mathbf{N_2}$.

Exempel 2. Mängden av alla hela tal Z={0, ± 1, ± 2, ± 3,...} är ekvivalent med mängden av alla naturliga tal **N** = {0,1,2,3,....}. Med andra ord har de två mängder samma kardinalitet (trots att N är en delmängd av Z) . Vi visar detta genom att ordna alla hela tal i en talföljd.

En bijektion från N till Z visas i schemat

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	…
Z	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	…

Själva bijektionen kan vi formellt definiera enligt följande

$f : N \to Z$ där $f(0) = 0$

och för n=1,2,3,…

$$f(2n) = -n$$
$$f(2n-1) = n.$$

Exempel 3. Mängden av alla rationella tal $Q = \left\{ \frac{m}{n}, \text{ där m, n är hela tal och n} \neq 0 \right\}$ är ekvivalent med **N**.

Exempel 4. Mängden av alla reella tal R är **inte ekvivalent** med **N**.

Nedan repeterar vi definitioner av bijektion, injektion, surjektion.

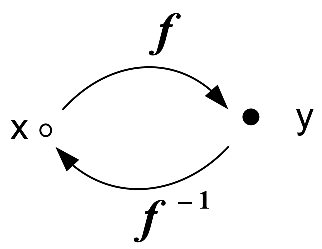
DEFINITION 1. Låt f vara en funktion från mängden A till B dvs $f: A \to B$.

Vi säger att f är en **bijektiv** funktion (eller en **bijektion**) om följande gäller:

1. Funktionens definitionsmängd D_f är lika med A.
2. Ekvationen $f(x) = y$, för varje $y \in B$, har **precis en lösning** $x \in A$.

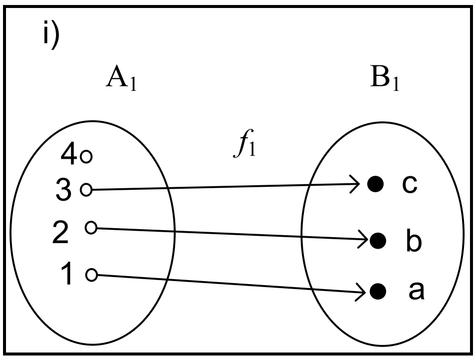
Anmärkning: En **bijektiv** funktion f har **inversen** f^{-1} som definieras enligt följande:

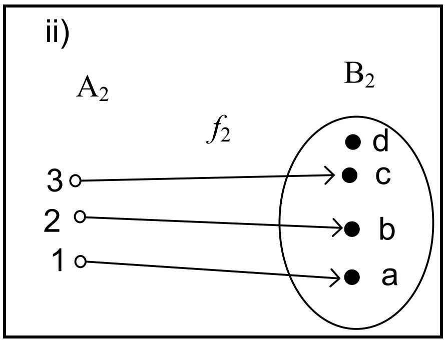
För en given y finns det **precis ett x** sådant att $f(x) = y$ och därför kan vi definiera $f^{-1}(y) = x$.

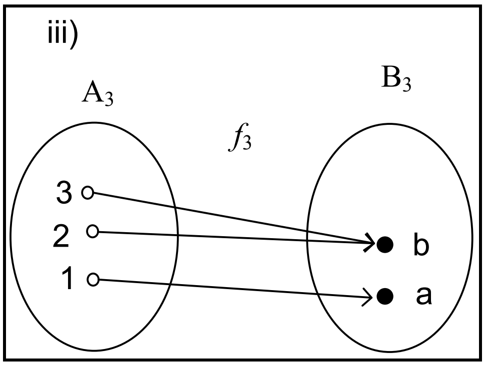


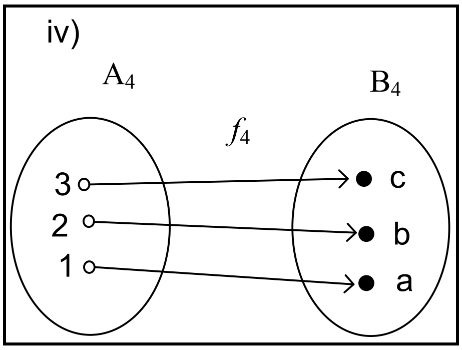
Exempel 5. A och B är mängder med ändligt många element)

Bestäm vilka av följande avbildningar är bijektioner:









Svar

i) Nej, element 4 i mängden A har ingen bild.

ii) Nej, element d i mängden B har inget original.

iii) Nej, element b har två original-element 2 och 3

iv) Ja, varje element i A har exakt en bild och varje element i B har exakt ett original.

DEFINITION 2.

1. INJEKTION. Funktionen $f : A \to B$, definierad för alla $x \in A$, kallas i**njektiv** om ekvationen $f(x) = y$, för varje $y \in B$, har **högst en lösning** $x \in A$ (d v s ingen eller en lösning $x \in A$).

2. SURJEKTION. Funktionen $f : A \to B$, definierad för alla $x \in A$, kallas **surjektiv** om ekvationen $f(x) = y$ för varje $y \in B$, har **minst en** lösning $x \in A$.

Från definitionen framgår följande:

1. En funktion $f : A \to B$, definierad för alla $x \in A$, är injektiv om och endast om **olika original har olika bilder** dvs

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Om det finns en injektiv funktion $f : A \to B$ där definitionsmängd D_f är lika med A

då är kardinalitet (A) ≤ kardinalitet (B) eller |A| ≤|B|;

med vardagliga ord "antalet element i A " ≤ "antalet element i B"

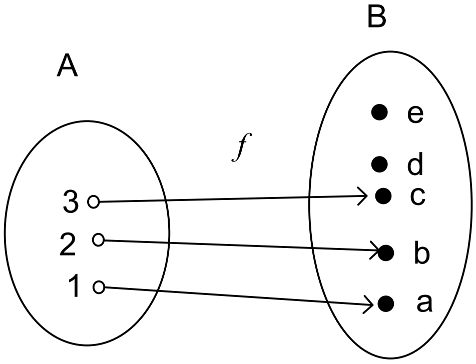
2. En funktion , definierad för alla $x \in A$, är surjektiv om och endast om $V_f = B$

Om det finns en surjektiv funktion $f : A \to B$, där definitionsmängd D_f är lika med A,

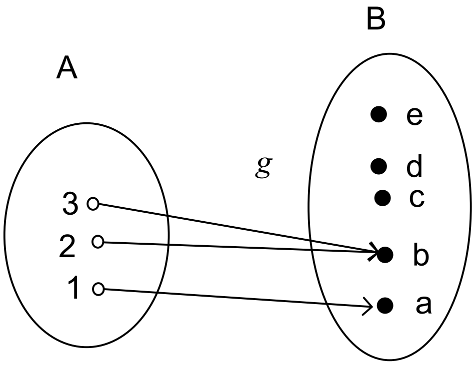
då är kardinalitet (A) $\geq$ kardinalitet (B) ;

3. En funktion $f : A \to B$ vars definitionsmängd är A, är **bijektiv** om och endast om den är både **surjektiv** och **injektiv**.

Exempel 6.



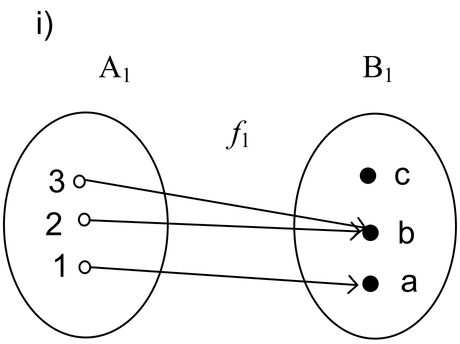
f är en injektiv funktion men inte surjektiv .

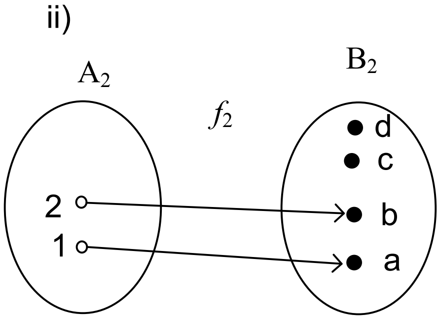


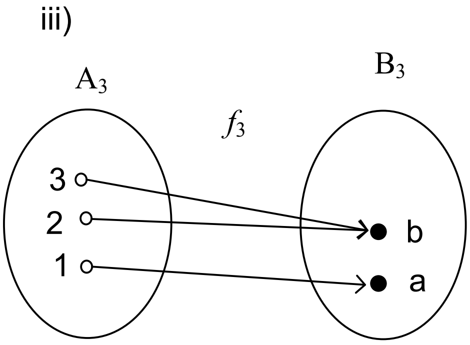
g är INTE injektiv eftersom 2 och 3 har samma bild.

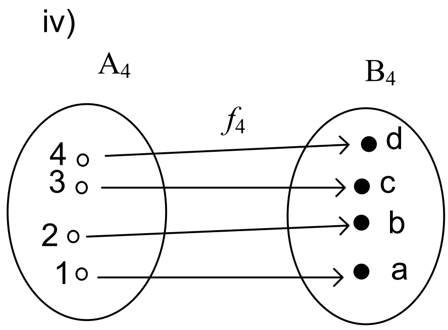
Exempel 7.

Bestäm för varje av följande avbildningar om den är en surjektion, injektion eller/och bijektion.









Svar: i) f_1 är varken injektiv eller surjektiv. ii) f_2 är injektiv men inte surjektiv. iii) f_3 är surjektiv men inte injektiv. iv) f_4 är både injektiv och surjektiv och därmed bijektiv.

===================================

NUMRERBARA (eller UPPRÄKNELIGA) MÄNGDER

Numrerbar (eller uppräknelig) mängd. Låt **N** beteckna mängden av alla naturliga tal. En mängd A är numrerbar (eller uppräknelig) om den är ekvivalent med en delmängd till $\boldsymbol{N}$ (eller med hela N).

Alternativt kan man säga att en mängd A är numrerbar om card(A) ≤ card (**N**).

Med andra ord en mängd A är numrerbar (eller uppräknelig) om det finns en **injektiv** funktion $f : A \to N$.

Anmärkning: I **några böcker** används begreppet numrerbar (eller uppräknelig) endast på **oändliga** mängder ekvivalenta med N.

Några exempel på numrerbara mängder:

1. Varje ändlig mängd är numrerbar

2. Mängden av alla naturliga tal är numrerbar

3. Mängden av alla hela tal är numrerbar

4. Mängden av alla rationella tal är numrerbar

Några exempel på icke-numrerbara mängder:

1. Man kan visa att mängden av alla reella tal mellan 0 och 1 dvs intervallet (0,1) är **inte numrerbar**.

2. Samma gäller för vilket intervall som helst med ändpunkterna *a* och *b* där *a* < b, till exempel $[2,3]$ dvs. intervallet $\{x \in R : 2 \leq x \leq 3\}$ är **inte numrerbar**.
Intervallet $(-1,3)$ dvs. intervallet $\{x \in R : -1 < x < 3\}$ är **inte numrerbar**.

3. Mängden av alla reella tal ***R*** är **inte numrerbar**.

4. En delmängd till ***R*** som innehåller ett intervall (*a* ,*b*), där *a* < b, är **inte numrerbar**.