Markovkedjor i kontinuerlig tid. Q-matrisen

Vi ska betrakta en diskret stokastisk process $X(t)$ i kontinuerlig tid $t \in [0,\infty)$.
Om en fysisk process kan befinna sig i olika tillstånd som vi betecknar med E_k då $X(t)=k$ betyder att processen är i tillstånd E_k vid tidpunkten t.
Mängden av alla möjliga tillstånd { E_k} kallas **tillståndsrummet.**
$\vec{p}(t) = (p_1(t), p_2(t),...)$ där $p_i(t) = P(X(t)) = i$ **)** är en **sannolikhetsvektor**.

Uttrycket
$P[X(t+\Delta t) = j \mid X(t) = i]$
betecknar **övergångssannolikheten** (transition probability) att systemet som är i tillståndet E_i vid tidpunkten t befinner sig i E_j vid nästa tidpunkt $t+\Delta t$.

Definition.
Markovkedja (i kontinuerlig tid) är en diskret stokastisk process med kontinuerlig tid som uppfyller Markov-villkoret:
För $t_k \in [0,\infty)$ och $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $t_k \in [0,\infty)$

$$P[X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n) = i,..., X(t_1) = i_1, X(t_0) = i_0] = P[X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n) = i].$$

Minneslösheten: Markovegenskapen (Markov –villkoret) betyder att övergångssannolikheten $P[X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n) = i]$ beror endast av ”nu-läge” dvs situationen vid tidpunkten t_n och inte av vägen till detta tillstånd. Vi säger att processen är **minneslös**.

Definition. En Markovkedja är **tidshomogen** om övergångssannolikheten $P[X(t+\Delta t) = j \mid X(t) = i] = p_{ij}(\Delta t)$ **beror ej** av tiden t utan bara av Δt (och tillstånd E_i, E_j) .

Vi betraktar (i den här kursen) tidshomogena Markovkedjor.
Övergångsmatrisen P beror av Δt :

$$P(\Delta t) = \begin{bmatrix} p_{11}(\Delta t) & p_{12}(\Delta t) & p_{13}(\Delta t) & \cdots \\ p_{21}(\Delta t) & p_{22}(\Delta t) & p_{23}(\Delta t) & \cdots \\ p_{31}(\Delta t) & p_{32}(\Delta t) & p_{33}(\Delta t) & \cdots \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

samt
$\vec{p}(t+\Delta t) = \vec{p}(t)P(\Delta t)$ (ekv1)
För att härleda en differentialekvation för $p(t)$, subtraherar vi $p(t)$ från båda leden i (ekv1) och
delar med Δt:

$$\frac{\vec{p}(t+\Delta t)-\vec{p}(t)}{\Delta t}=\frac{\vec{p}(t)P(\Delta t)-\vec{p}(t)}{\Delta t}\Rightarrow$$

$$\frac{\vec{p}(t+\Delta t)-\vec{p}(t)}{\Delta t}=\vec{p}(t)\frac{P(\Delta t)-I}{\Delta t}$$ (där I är en enhetsmatris) .

Om $\Delta t \to 0$ får vi följande viktiga ekvation :

$$\vec{p}'(t)=\vec{p}(t)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(\Delta t)-I}{\Delta t} \qquad \text{ekv 2}$$

$$\frac{P(\Delta t)-I}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix} p_{11}(\Delta t)-1 & p_{12}(\Delta t) & p_{13}(\Delta t) & \cdots \\ p_{21}(\Delta t) & p_{22}(\Delta t)-1 & p_{23}(\Delta t) & \cdots \\ p_{31}(\Delta t) & p_{32}(\Delta t) & p_{33}(\Delta t)-1 & \cdots \\ \vdots & & & \end{bmatrix}.$$

Vi betecknar $Q=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(\Delta t)-I}{\Delta t}$ (om gränsvärdet existerar) och får

$\vec{p}'(t)=\vec{p}(t)Q$ (ekv 3)

Anmärkning: Summan av elementen för varje rad i Q-matrisens är lika med 0 eftersom

$p_{11}(\Delta t)-1+\ p_{12}(\Delta t)+p_{13}(\Delta t)+....=$

$-1+(\ p_{11}(\Delta t)+p_{12}(\Delta t)+p_{13}(\Delta t)+....)=-1+1=0$

3. I vår kurs antar vi vidare att

$$p_{ij}(\Delta t)=q_{ij}\cdot\Delta t+o(\Delta t), \qquad \text{för } i\neq j,$$

där $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\to 0$ om $\Delta t\to 0$

Då har Q-matrisen , $Q=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(\Delta t)-I}{\Delta t}$ konstanta element

$$Q=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \cdots \\ \vdots & & & \end{bmatrix}, \qquad \text{där } \sum_k q_{ik}=0 \text{ för alla i.}$$

$q_{ik}=$ kallas övergångsintensitet från tillstånd E_i till E_k

Eftersom $\sum_k q_{ik} = 0$ för alla i har vi

$$q_{ii} = -\sum_{k \neq i} q_{ik}$$

vilket ger

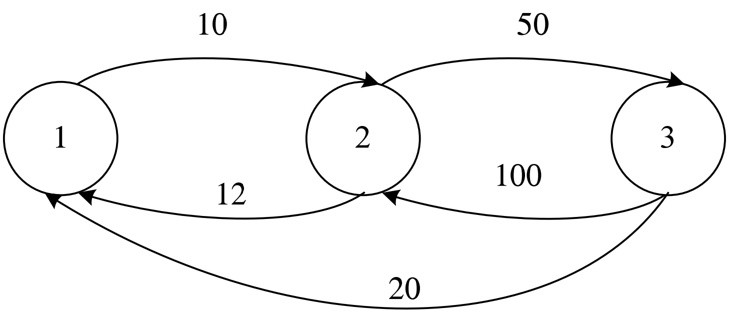
$$Q = \begin{bmatrix} (-\sum_{k\neq 1} q_{1k}) & q_{12} & q_{13} & \cdots \\ q_{21} & (-\sum_{k\neq 2} q_{2k}) & q_{23} & \cdots \\ q_{31} & q_{32} & (-\sum_{k\neq 3} q_{3k}) & \cdots \\ \vdots & & & \end{bmatrix}.$$

Matrisen Q kallas **intensitetmatrisen**.

Beteckningar:
Sannolikhetsvektor :
$\vec{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), \ldots)$ **är en startsannolikhetsvektor** (**initialvektor)**
$\vec{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots)$ **är en transient (tidsberoende) sannolikhetsvektor (**här $p_i(t) = P(X_t) = i$ **)**

Ekvationen för den stationära sannolikhetsvektorn $\vec{p}$ **:**
$\vec{p}Q = \vec{0}$

Exempel 1. (Från diagrammet till matrisen)
En Markovkedja i kontinuerlig tid med tre tillstånd E1, E2 och E3 har övergångsintensiteter som visas i nedanstående diagram. Bestäm matrisen Q.



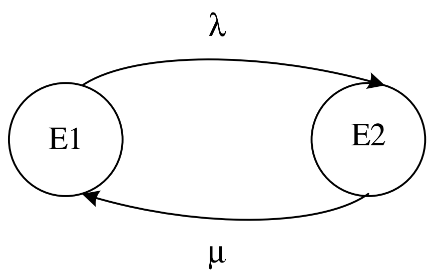
Lösning: Först bestämmer vi elementen utanför diagonalen genom att ange motsvarande intensiteter från diagrammet:

$$Q=\begin{bmatrix} * & 10 & 0 \\ 12 & * & 50 \\ 20 & 100 & * \end{bmatrix}.$$

Därefter bestämmer vi diagonalelementen så att summan av element i en rad blir 0, alltså

$$Q=\begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 12 & -62 & 50 \\ 20 & 100 & -120 \end{bmatrix}$$

Exempel 2. En Markovkedja i kontinuerlig tid med två tillstånd E1, E2 och övergångsintensiteter λ (från E1 till E2) och μ (från E2 till E1)



har övergångsmatrisen $Q=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$.

==

Övningar

Uppgift 1.
Ett system har i genomsnitt 5 fel per år. Reparationstiden är exponentialfördelad och systemets reparationstid är i genomsnitt 1 månad. Vid t=0 är systemet i funktion.
Vi betecknar
$p_1(t)$ = sannolikheten för att system fungerar vid tidpunkten t och
$p_2(t)$ = sannolikheten för att system inte fungerar vid tidpunkten t.
a) Rita grafen med övergångsintensiteter (tidsenhet=1 år).
b) Bestäm Q-matrisen.
c) Bestäm **den stationära sannolikhetsvektorn,** dvs lös ekvationen $\vec{p}Q=\vec{0}$.
d) Bestäm **den transienta sannolikhetsvektorn,** dvs lös systemet $\vec{p}'(t)=\vec{p}(t)Q$ med avseende på $\vec{p}(t)=(p_1(t), p_2(t))$
e) Bestäm sannolikheten att systemet är i funktion vid tidsmoment t= 1,5 år.
Tips.
Felintensitet $\lambda=5$ fel per år.

Betjäningsintensitet $\mu = \frac{1}{reparationstid} = \frac{1}{1 månad} = \frac{1}{\frac{1}{12} år} = \frac{12}{år}$

dvs $\mu = 12$ reparationer per år.

Lösning:

a)

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "5"] & 2 \arrow[l, bend left, "12"] \end{tikzcd}$$

b) $Q = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 12 & -12 \end{bmatrix}$

c) Låt $\vec{p} = (x, y)$ vara den stationära sannolikhetsvektorn d v s den sannolikhetsvektor som satisfierar $\vec{p}Q = \vec{0}$.

Då gäller

i) $x + y = 1$

(detta gäller eftersom $\vec{p} = (x, y)$ är en sannolikhetsvektor) ,

och

ii) $(x, y)\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 12 & -12 \end{bmatrix} = (0,0)$

Vi får systemet:

$x + y = 1$ (ekv 1)

$-5x + 12y = 0$ (ekv 2)

$5x - 12y = 0$ (ekv 3)

Ekvation tre är proportionell med ekv 2 och därför bestämmer vi x, y från de första två ekvationer och får :

$x = \frac{12}{17}$, $y = \frac{5}{17}$.

Svar c) Den stationära vektorn är $\vec{p} = (12/17, 5/17)$

d) Vi substituerar $\vec{p}(t) = (p_1(t), p_2(t))$ i ekvationen $\vec{p}'(t) = \vec{p}(t)Q$ och får

$$(p_1'(t), p_2'(t)) = (p_1(t), p_2(t))\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 12 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$p_1'(t) = -5p_1(t) + 12p_2(t)$ (ekv a)

$p_2'(t) = 5p_1(t) - 12p_2(t)$ (ekv b)

samt

$p_1(t) + p_2(t) = 1$ (ekv c)

(ekv c gäller eftersom $(p_1(t), p_2(t)$ är en sannolikhetsvektor.)

Från ekv c får vi

$p_2(t) = 1 - p_1(t)$
som vi substituerar i (ekv a) för att få en differentialekvation med 1 obekant funktion $p_1(t)$:
$p_1'(t) = -5p_1(t) + 12(1 - p_1(t))$
Efter förenkling har vi följande ekvation med konstanta koefficienter:
$p_1'(t) + 17p_1(t) = 12 \qquad (*)$

Motsvarande karakteristiska ekvation till homogena delen är
$r + 17 = 0 \Rightarrow r = -17$
och därmed är
$Y_h = Ce^{-17t}$ den allmänna lösningen till den homogena delen.
En partikulär lösning får vi med hjälp av ansatsen
$y_p = A$ (eftersom högerledet i (*) är 12, dvs en konstant)
Substitutionen av $y_p = A$ i (*) gör
$0 + 17A = 12 \Leftarrow A = 12/17$
Alltså $y_p = 12/17$
Därför
$p_1(t) = Y_h + y_p = Ce^{-17t} + 12/17$

Begynnelsevillkoret: Enligt antagande är systemet i funktion vid t=0. Därför $p_1(0) = 1.$
Alltså $Ce^0 + 12/17 = 1 \Rightarrow C = 5/17$ och

$$p_1(t) = \frac{5}{17}e^{-17t} + \frac{12}{17}$$

För att få $p_2(t)$ använder vi $p_2(t) = 1 - p_1(t)$ och får $p_2(t) = \frac{5}{17} - \frac{5}{17}e^{-17t}$

Svar d) $\vec{p} = (p_1(t), p_2(t)) = \left(\frac{5}{17}e^{-17t} + \frac{12}{17}, \quad \frac{5}{17} - \frac{5}{17}e^{-17t} \right)$

Svar e) $p_1(1.5) = 0.706$

Uppgift 2. Ett system har i genomsnitt 4 fel per år. Tidsavståndet mellan fel är exponentialfördelad. När ett fel uppstår då börjar reparationen. Reparationstiden är exponentialfördelad och systemets reparationstid är i genomsnitt 1 månad.
Vid t=0 är systemet i funktion.
Bestäm sannolikheten att systemet är i funktion vid tidsmoment t= 2.1 år.

Tips.
Felintensitet $\lambda = 4$ fel per år**.**
Betjäningsintensitet $\mu = \frac{1}{reparationstid} = \frac{1}{1 månad} = \frac{1}{\frac{1}{12} år} = \frac{12}{år}$

dvs $\mu = 12$ reparationer per år.

Svar: $p_1(t)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot e^{-16t} \Rightarrow p_1(2.1)=0.75$

Uppgift 3. Ett system har i genomsnitt 3 fel per **år**. Tidsavståndet mellan fel är exponentialfördelad. Reparationstiden är exponentialfördelad och systemets reparationstid är i genomsnitt 1 månad.
Vi betecknar
$p_1(t)$ = sannolikheten för att system fungerar vid tidpunkten t, och
$p_2(t)$ = sannolikheten för att system inte fungerar vid tidpunkten t.
Vi antar att sannolikheten för att systemet är i funktion vid t=0 är $p_1(0)=0.5$ och därför $p_2(0)=0.5$.
a) Bestäm intensitetsmatrisen Q och motsvarande system med 2 diff. ekvationer.
b) Lös systemet med avseende på $p_1(t)$ och $p_2(t)$ (du ska lämna in hela lösningen, inte bara svar)
c) Bestäm sannolikheten att systemet är i funktion vid tiden *t* = 10 månader.

Tips.
Felintensitet $\lambda=3$ fel per år**.**
Betjäningsintensitet $\mu=\frac{1}{reparationstid}=\frac{1}{1 månad}=\frac{1}{\frac{1}{12}år}=\frac{12}{år}$

dvs $\mu=12$ reparationer per år.

Svar: a)
$\lambda=3$, $\mu=12$

$$Q=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 12 & -12\end{bmatrix}$$

$$p_1'(t)=-3p_1(t)+12p_2(t)$$

$$p_2'(t)=3p_1(t)-12p_2(t)$$
$$p_1(0)=0.5$$

b) $p_1(t)=\frac{4}{5}-\frac{3}{10}e^{-15t}$ $\qquad$ $p_2(t)=\frac{1}{5}+\frac{3}{10}e^{-15t}$

c) $p_0(10 \text{ månader})=p_0(10/12 \text{ år})\approx 0.8$

Uppgift 4. Ett system har i genomsnitt 4 fel per år. Tidsavståndet mellan fel är exponentialfördelad. Reparationstiden är exponentialfördelad och systemets reparationstid är i genomsnitt 1 månad.
Vi betecknar
$p_1(t)$ = sannolikheten för att system fungerar vid tidpunkten t, och
$p_2(t)$ = sannolikheten för att system inte fungerar vid tidpunkten t.

Vi antar att sannolikheten för att systemet är i funktion vid t=0 är $p_1(0) = 0.6$ och därför $p_2(0) = 0.4$.

a) Bestäm intensitetsmatrisen Q och motsvarande system med 2 diff. ekvationer.

b) Lös systemet med avseende på $p_1(t)$ och $p_2(t)$ (du ska lämna in hela lösningen, inte bara svar)

c) Bestäm sannolikheten att systemet är i funktion vid tiden t = 8 månader.

Tips.

Felintensitet $\lambda = 4$ fel per år**.**

Betjäningsintensitet $\mu = \dfrac{1}{reparationstid} = \dfrac{1}{1 månad} = \dfrac{1}{\frac{1}{12} år} = \dfrac{12}{år}$

dvs $\mu = 12$ reparationer per år.

Svar:

a) $\lambda = 4$**,** $\mu = 12$

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 12 & -12 \end{bmatrix}$$

$$p_1'(t) = -4p_1(t) + 12p_2(t)$$

$$p_2'(t) = 4p_1(t) - 12p_2(t)$$
$$p_1(0) = 0.6$$

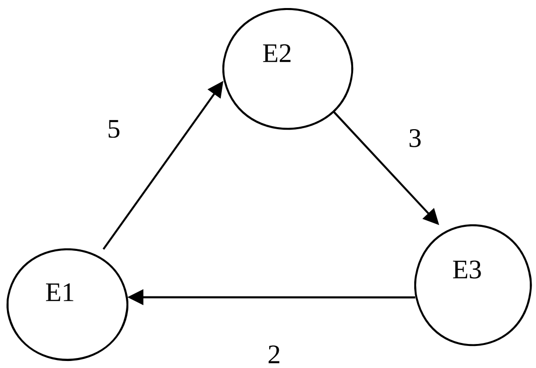
b) $p_1(t) = 0.75 - 0.15e^{-16t}$ $\qquad$ $p_2(t) = 0.25 + 0.15e^{-16t}$

c) $p_0(8/12) \approx 0.75$

Uppgift 5. Ett system har tre tillstånd E_1, E_2 och E_3 med övergångsintensiteter enligt nedanstående diagram.

a)Bestäm Q- matrisen.

b) Beräkna den stationära sannolikhetsvektorn.



Svar:

a) $Q=\begin{bmatrix}-5 & 5 & 0\\ 0 & -3 & 3\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}$

Lösning b)

Låt $\vec{p}=(x,y,z)$ vara den sökta stationära sannolikhetsvektorn.

Vektorn $\vec{p}=(x,y,z)$ får vi genom att lösa ekvationen $\vec{p}Q=\vec{0}$

dvs

$$(x,y,z)\begin{bmatrix}-5 & 5 & 0\\ 0 & -3 & 3\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}=(0,0,0)\ .$$

Genom att utföra matrismultiplikation och därefter identifiera komponenter får vi följande 3 ekvationer:

$-5x+2z=0$ (ekv1)

$5x-3y=0$ (ekv2)

$3y-2z=0$ (ekv3)

(ekv3 är beroende av ekv1 och ekv2)

Den fjärde är normeringsekvationen

$x+y+z=1$ (ekv4)

Vi ignorerar ekv3 och löser systemet

$-5x+2z=0$ (ekv1)

$5x-3y=0$ (ekv2)

$x+y+z=1$ (ekv4)

Från ekv 1 får vi $z=5x/2$ som vi substituerar i andra två ekv (z finns den här gången endast i ekv4)

Vi har

$5x-3y=0$ (ekv2)

$x+y+\frac{5x}{2}=1$ (ekv4)

Från ekv2 får vi y=5x/3 som vi substituerar i ekv 4 och får

$x+\frac{5x}{3}+\frac{5x}{2}=1$. Vi multiplicerar ekvationen med 6 och får

$6x+10x+15x=6 \Rightarrow x=6/31.$

Från y=5x/3 har vi y=10/31

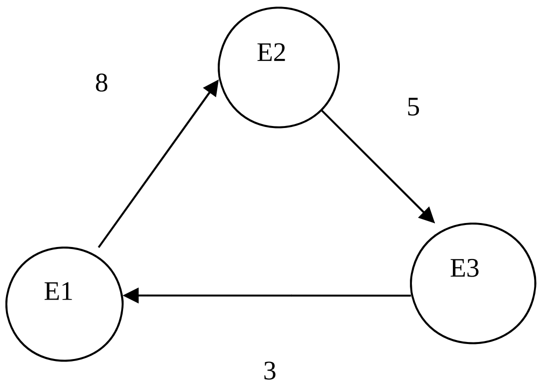
Slutligen $z=5x/2$ ger z= 15/31

Svar: b) (6/31, 10/31, 15/31)

Uppgift 6. Ett system har tre tillstånd E_1, E_2 och E3 med övergångsintensiteter enligt nedanstående diagram.

a)Bestäm Q- matrisen.

b) Beräkna den stationära sannolikhetsvektorn.

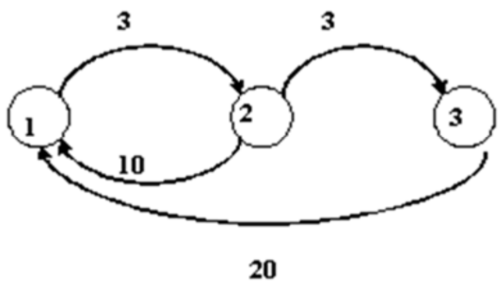


Svar:

a) $Q = \begin{bmatrix} -8 & 8 & 0 \\ 0 & -5 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

b) (15/79, 24/79, 40/79)

Uppgift 7. Ett system har tre tillstånd E_1, E_2 och E_3 med övergångsintensiteter enligt nedanstående diagram.
a)Bestäm Q- matrisen.
b) Beräkna den stationära sannolikhetsvektorn.



Svar:

a) $Q = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 10 & -13 & 3 \\ 20 & 0 & -20 \end{bmatrix}$

b) (260/329, 60/329, 9/329)