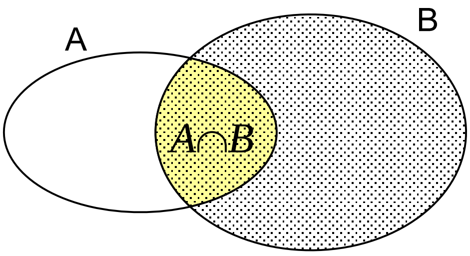
BETINGAD SANNOLIKHET
TOTAL SANNOLIKHET
OBEROENDE HÄNDELSER

BETINGAD SANNOLIKHET

Definition. Antag att $P(B) \neq 0$. Sannolikheten för A om B har inträffat betecknas $P(A|B)$, kallas den betingade sannolikheten och beräknas enligt följande

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{(f1)}$$

Förklaring:



Anta att B redan har hänt. Då är "alla möjliga fall" de element som ligger i B. Vi kan betrakta B som ett nytt utfallsrum. Händelsen A händer i detta fall endast om resultat hamnar i $P(A \cap B)$. Därför

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exempel 1. Låt $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$ och $P(A \cup B) = 0.5$. Bestäm sannolikheten för A om vi vet att B har hänt. Med andra ord bestäm $P(A|B)$.

Lösning: Från formeln $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ har vi
$0.5 = 0.3 + 0.4 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.2$.

Därför $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.2}{0.4} = 0.5$

Svar: $P(A|B) = 0.5$

Från ovanstående formel (f1) får vi följande viktiga relationer

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \quad \text{och}$$
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

kan användas för beräkning av sannolikheten för snittet $P(A \cap B)$.
För tre händelser har vi

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B).$$

Exempel 2.
I en låda finns 6 röda (R) och 4 gröna (G) kulor. Man tar en kula på måfå och upprepar dragningen 3 gånger utan återlämning. Vad är sannolikheten att få resultat i följande ordning
a) R, G, R b) G, G,G c) G, R,G d) R,R,R

Lösning:
a) $P(R\cap G\cap R)=P(R)\cdot P(G\mid R)\cdot P(R\mid R\cap G) = \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8}$

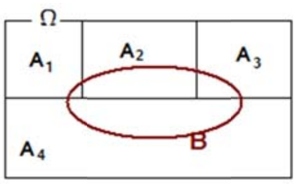
b) $P(G\cap G\cap G)=P(G)\cdot P(G\mid G)\cdot P(G\mid G\cap G) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}$

c) $\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8}$

d) $\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}$

===

DEN TOTALA SANNOLIKHETEN



Låt $\Omega=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ där A_i är disjunkta händelser. Sannolikheten för en händelse B kan beräknas enligt följande formel:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B\mid A_i) \quad \text{(Lagen om total sannolikhet)}$$

Sannolikheten för A_k givet att B har hänt är

$$P(A_k\mid B)=\frac{P(A_k\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_k)\cdot P(B\mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B\mid A_i)}$$

Exempel 3.
Ett företag som tillverkar glödlampor har tillverkningen förlagt till tre olika fabriker. Fabrik A står för 20% , fabrik B för 35 %, och fabrik C för 45% av tillverkningen,. Man vet att en

glödlampa från fabriken A är defekt med 8% sannolikhet. Motsvarande felsannolikhet för fabrik B är 2 % och 1%. för fabrik C.
Man har blandat glödlampor från de tre fabrikerna i ett stort centralt lager.
a) Peter tar på måfå en glödlampa från lagret. Vad är sannolikheten att glödlampan är defekt.
b) Anna tar på måfå en glödlampa ur lagret och finner att den är defekt. Vad är sannolikheten att den tillverkats i fabrik B ?

Lösning:

Beteckning**:**
D = En lampa är defekt , K = En lampa är korrekt
A = En lampa har tillverkats i fabrik A,
B =En lampa har tillverkats i fabrik B
C= En lampa har tillverkats i fabrik C

a) Den totala sannolikheten att lampan är defekt är

$P(D) = P(A) \cdot P(D \mid A) + P(B) \cdot P(D \mid B) + P(C) \cdot P(D \mid C)$

$= 0.20 \cdot 0.08 + 0.35 \cdot 0.02 + 0.45 \cdot 0.01 = 0.0275$

b) Sannolikheten att en defekt lampa tillverkats i fabriken B är

$$P(B \mid D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(D \mid B)}{P(D)} = \frac{0.35 \cdot 0.02}{0.0275} = 0.2545 = 25.45\%$$

Svar: a) 0.0275 b) 0.2545

==

OBEROENDE HÄNDELSER

Definition. Två händelser A och B är **oberoende** om och endast om

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).}$$

===

Förklaring. Anta att $P(B) \neq 0$ och $P(B^C) \neq 0$. Då är det enkelt att bevisa följande relation

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow P(A \mid B) = P(A \mid B^C) = P(A)$.

Detta kan tolkas på följande sätt: Om (och endast om) $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$ då är sannolikheten för A om B har hänt lika med sannolikheten om B inte har hänt. Med andra ord händelsen A **beror ej** om B har hänt.

Exempel 4. Låt $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$ och $P(A \cup B) = 0.8$. Bestäm om A och B är oberoende händelser.

Lösning: För att avgöra om A och B är oberoende kontrollerar vi om kravet i definitionen

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ är uppfyllt.

Först bestämmer vi $P(A \cap B)$ med hjälp av formeln

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$0.8 = 0.4 + 0.5 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.1$.

Nu beräknar vi vänster- och högerledet i kravet $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$:
VL= $P(A)\cdot P(B)=0.2$
HL= $P(A\cap B)=0.1$
Alltså A och B är INTE oberoende eftersom $P(A)\cdot P(B)\neq P(A\cap B)$. Vi kan säga att A och B är beroende.

Egenskaper för två oberoende händelser.
Anta att A och B är **oberoende** dvs $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.
Då gäller
i) $P(A\,|\,B)=P(A\,|\,B^C)=P(A)$
och symmetriskt
$P(B\,|\,A)=P(B\,|\,A^C)=P(B)$
ii) $P(A\cap B^C)=P(A)\cdot P(B^C)$,
$P(A^C\cap B)=P(A^C)\cdot P(B)$,
$P(A^C\cap B^C)=P(A^C)\cdot P(B^C)$
Med andra ord, om *A* och *B* är oberoende då är : *A* och B^C , *B* och A^C samt A^C och B^C **också oberoende** händelser.

Exempel 5. Låt *A* och *B* vara **oberoende** händelser och $P(A)=0.4$, $P(B)=0.2$.
Bestäm a) $P(A\cap B)$ b) $P(A\cup B)$ c) $P(A\cap B^C)$ d) $P(A^C\cap B)$, e) $P(A^C\cap B^C)$
Lösning:
a) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0.08$
b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.4+0.2-0.08=0.52$
c) $P(A\cap B^C)=P(A)\cdot P(B^C)=P(A)\cdot(1-P(B))=0.4\cdot 0.8=0.32$
d) $P(A^C\cap B)=P(A^C)\cdot P(B)=0.6\cdot 0.2=0.12$
e) $P(A^C\cap B^C)=P(A^C)\cdot P(B^C)=0.6\cdot 0.8=0.48$

Tre eller flera oberoende händelser
Begreppet "oberoende händelser" för tre eller flera händelser kan definieras på liknande sätt:
Definition. Vi säger att $A_1, A_2, \cdots A_n$ är oberoende om följande gäller
$$P(A_{i1}\cap A_{i2}\cap\cdots\cap A_{ik})=P(A_{i1})\cdot P(A_{i2})\cdots P(A_{ik})$$
oavsett vilka k händelser $A_{i1}, A_{i2}, \cdots A_{ik}$ vi plockar ut bland händelserna $A_1, A_2, \cdots A_n$.

För tre händelser, som speciellt fall av ovanstående definition, har vi följande definition.

Definition. Tre händelser A, B och C är **oberoende** om följande **4 krav** är uppfyllda:
$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$
$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$
$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$
$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

Det är enkelt att bevisa följande egenskap:
Om A, B och C är **oberoende** så är också A^C, B, C oberoende. (Samma gäller för A, B^C, C, ..., och A^C, B^C, C^C).

Erfarenhet visar att om händelser är oberoende i ordets vanlig mening, får vi rimliga resultat om vi betraktar händelserna som oberoende i sannolikhetsteorins mening {dvs i sådana fall kan vi använda formeln $P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \cdots \cap A_{ik}) = P(A_{i1}) \cdot P(A_{i2}) \cdots P(A_{ik})$ }.

Beräkning av sannolikheten för unionen av oberoende händelser.

Låt $A_1, A_2, \cdots A_n$ vara oberoende händelser
Då gäller (enligt De Morgans lagar)

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \left(A_1^C \cap A_2^C \cap \cdots \cap A_n^C\right)^C$$

Därför

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P\left[\left(A_1^C \cap A_2^C \cap \cdots \cap A_n^C\right)^C\right] = 1 - P\left(A_1^C \cap A_2^C \cap \cdots \cap A_n^C\right)$$

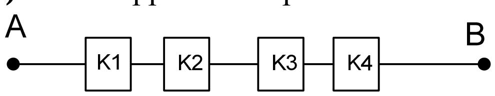
(oberoende händelser)

$$= 1 - P(A_1^C) \cdot P(A_2^C) \cdots P(A_n^C)$$

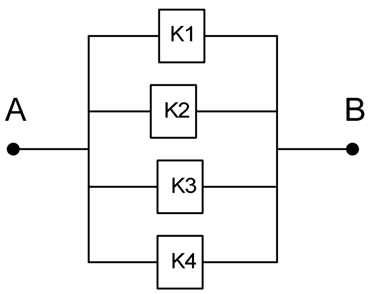
Exempel 6.

I nedanstående system fungerar komponenter K1, K2, K3, K4 oberoende av varandra med sannolikheterna 0.1, 0.2, 0.3 respektive 0.4. Hela systemet fungerar om det finns minst en fungerande väg mellan A och B. Bestäm sannolikheten att systemet a), b) fungerar.

a) seriekopplade komponenter



b) parallellkopplade komponenter



Lösning

a) Systemet fungerar om alla komponenter fungerar:

$P(K1 \cap K2 \cap K3 \cap K4) =$ (oberoende händelser)

$P(K1) \cdot P(K2) \cdot P(K3) \cdot P(K4) = 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.4 = 0.0024$

b) Systemet fungerar om minst en väg mellan A och B fungerar:

Först beräknar vi sannolikheten att **ingen** väg fungerar:

$P(K1^C \cap K2^C \cap K3^C \cap K4^C) =$ (oberoende händelser)

$= P(K1^C) \cdot P(K2^C) \cdot P(K3^C) \cdot P(K4^C) = 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.6 = 0.3024$

P(minst en väg fungerar)=1 – P(ingen väg fungerar)

dvs

$P(K1 \cup K2 \cup K3 \cup K4) = 1 - P(K1^C \cap K2^C \cap K3^C \cap K4^C)$

$= 1 - 0.3024 = 0.6976$

Svar: a) 0.0024 b) 0.6976

==

ÖVNINGSUPPGIFTER:

Uppgift 1.

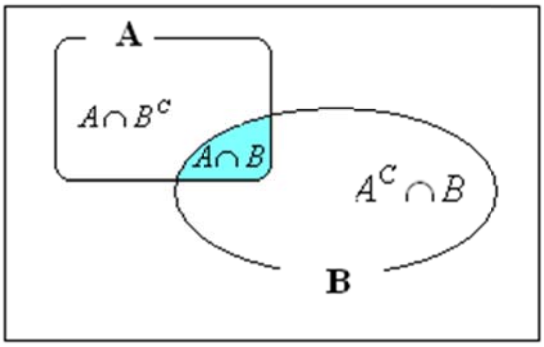
För de två händelserna A och B gäller att $P(A \cup B) = 0.7$, $P(A \cap B^C) = 0.3$ och $P(A) = 0.5$

a) Rita mängddiagram och bestäm $P(A \cap B)$.

b) Bestäm (och förklara) om A och B är oberoende händelser .

Lösning:

a)



Från $P(A) = P(A \cap B^C) + P(A \cap B)$ har vi

$0.5 = 0.3 + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.2$

b) Vi säger att A och B är oberoende händelser om

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Från

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

har vi $0.7 = 0.5 + P(B) - 0.2 \Rightarrow P(B) = 0.4$.

Eftersom $P(A \cap B) = 0.2$ och

$P(A) \cdot P(B) = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$

ser vi att A och B är oberoende händelser.

Svar. a) $P(A\cap B)=0.2$ b) A och B är oberoende händelser

Uppgift 2.

För händelserna A och B gäller $P(B\mid A)=0.4$, $P(A)=0.6$ och $P(A\cup B)=0.8$.
Bestäm
a) P(A∩B), **b)** $P(B)$, **c)** $P(A\cap B^C)$ **d)** $P(A^c\cup B^c)$.

e) Avgör om A och B är oberoende händelser.

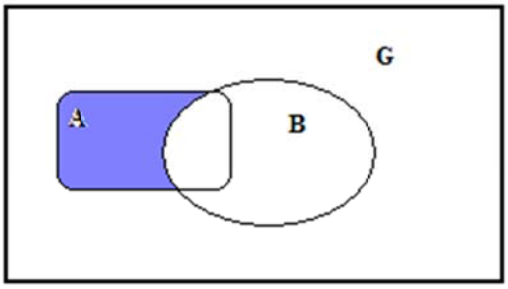
a) $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow 0.4=\dfrac{P(A\cap B)}{0.6} \Rightarrow P(A\cap B)=0.24$

b)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow$$
$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B)$$
$$=0.8-0.6+0.24=0.44$$

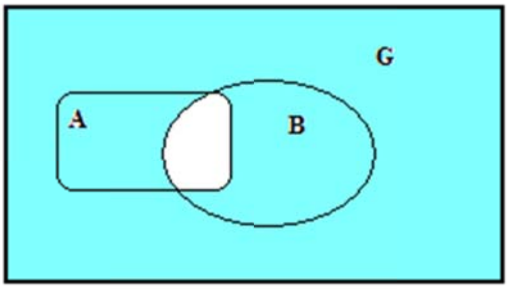
c)

$P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)=0.6-0.24=0.36$



$A\cap B^C$

d) $P(A^c\cup B^c)=$ (De Morgans lag) $=$ $P((A\cap B)^c)=1-P(A\cap B)=1-0.24=0.76$



$A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$ (De Morgans lagar)

e) $P(A\cap B)=0.24$, $P(A)\cdot P(B)=0.6\cdot 0.44=0.264$
A och B är beroende händelser eftersom $P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)$

Uppgift 3.

För händelserna A och B gäller $P(A \cap B) = 0.2$, och $P(A) = 0.5$ och $P(AUB) = 0.8$.

a) Bestäm $P(A|B)$.

b) Avgör om A och B är oberoende händelser?

Svar a) P(B)=0.5 och $P(A|B) = 0.4$

Svar b) Nej

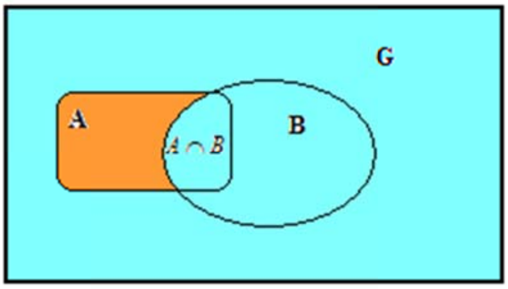
Uppgift 4.

För händelserna A och B gäller $P(A|B) = 0.2$, och $P(B) = 0.5$ och $P(A \cup B) = 0.8$.

a) Bestäm $P(A)$.

b) Bestäm $P([A \cap B^C]^C)$

Lösning:



a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0.2 = \dfrac{P(A \cap B)}{0.5} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.1$

Detta substituerar vi i formeln

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$0.8 = P(A) + 0.5 - 0.1 \Rightarrow$

$P(A) = 0.4$

b)

$P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.1 = 0.3$

$P([A \cap B^C]^C) = 0.7$

Uppgift 5.

Oberoende händelserna A, B och C inträffar med följande sannolikheter:

P(A)=0.3, P(B)=0.4 och P(C)= 0.8.

Bestäm sannolikheten att

a) ingen av A, B och C inträffar,

b) alla tre inträffar

c) exakt en av A, B, C inträffar

Lösning:

a) P(ingen av A, B och C inträffar) $= P(A^c \cap B^c \cap C^c) = 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.2 = 0.084$

b) P(alla tre inträffar) = $P(A\cap B\cap C)=0.3\cdot 0.4\cdot 0.8=0.096$
c)P(exakt en av A, B, C inträffar)=
$=P(A\cap B^c\cap C^c)+P(A^c\cap B\cap C^c)+P(A^c\cap B^c\cap C)$
$=0.3\cdot 0.6\cdot 0.2+0.7\cdot 0.4\cdot 0.2+0.7\cdot 0.6\cdot 0.8=0.428$

Svar. a) 0.084 b) 0.096 c) 0.428

Uppgift 6.

Låt A, B och C vara **oberoende** händelser som inträffar med sannolikheterna
$P(A)=0.5$, $P(B)=0.4$ och $P(C)=0.2$.
Bestäm sannolikheterna för följande händelser:

a) Ingen av A, B, C inträffar.
b) Minst en av A, B, C inträffar.
c) Exakt en av A, B, C inträffar.
d) Exakt två av A, B, C inträffar.
e) Alla tre händelser A, B och C inträffar.
f) Minst två av A, B, C inträffar.
g) Högst två av A, B, C inträffar.
h) A och B men inte C inträffar.

Lösning:

a) P(Ingen av A, B, C inträffar.)= $P(A^C\cap B^C\cap C^C)=[\text{oberoende händelser}]$
$=P(A^C)\cdot P(B^C)\cdot P(C^C)=0.5\cdot 0.6\cdot 0.8=0.24$

b)Händelsen " Minst en av A, B, C inträffar." är komplement till händelsen " Ingen av A, B, C inträffar. "
Därför P(Minst en av A, B, C inträffar.)=1–P(Ingen av A, B, C inträffar.)=0.76

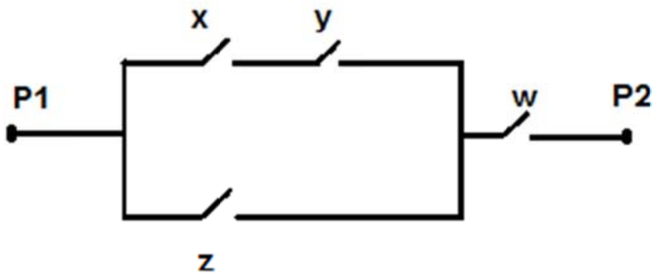
Alternativ: P(Minst en av A, B, C inträffar.)=
$P(A\cup B\cup C)=P((A^C\cap B^C\cap C^C)^C)=1-P(A^C\cap B^C\cap C^C)=1-0.24=0.76$

c)
P(Exakt en av A, B, C inträffar.)=$P\{(A\cap B^C\cap C^C)\cup(A^C\cap B\cap C^C)\cup(A^C\cap B^C\cap C)\}$

(notera att $(A\cap B^C\cap C^C)$, $(A^C\cap B\cap C^C)$ och $(A^C\cap B^C\cap C)$ är tre disjunkta mängder)
$=P(A\cap B^C\cap C^C)+P(A^C\cap B\cap C^C)+P(A^C\cap B^C\cap C)=$ (oberoende händelser)
$P(A)\cdot P(B^C)\cdot P(C^C)+P(A^C)\cdot P(B)\cdot P(C^C)+P(A^C)\cdot P(B^C)\cdot P(C)$=0.46
d) $P(A)\cdot P(B)\cdot P(C^C)+P(A)\cdot P(B^C)\cdot P(C)+P(A^C)\cdot P(B)\cdot P(C)=0.26$
e) $P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$=0.04
f) P(Minst två av A, B, C inträffar) =P(exakt två inträffar) + P(exakt tre inträffar) = 0.26+0.04=0.30.
g) P(Högst två av A, B, C inträffar.)= P(ingen inträffar)+ P(exakt en inträffar)+ P(exakt två inträffar)=0.24+0.46+0.26=0.96
h) $P(A)\cdot P(B)\cdot P(C^C)$=0.16

Uppgift 7.

Vad är sannolikheten att det blir kontakt mellan punkterna P1 och P2 i nedanstående schema om reläkontakterna x, y, z och w slutes med sannolikheterna 0.2 , 0.4, 0.6 resp. 0.8 och händelserna att de olika kontakterna sluts är oberoende.



Lösning:

Vi har kontakt mellan punkterna P1 och P2 om minst en väg fungerar och dessutom kontakten w är sluten.
Väg 1 fungerar om både x, y är slutna.

$v_1 = x \cdot y = 0.08$

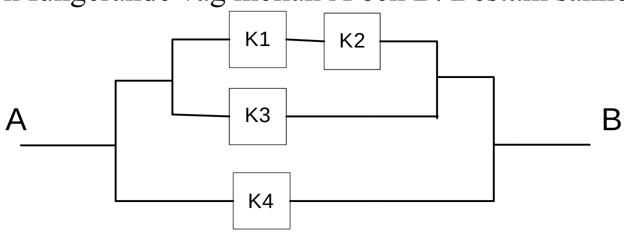
$v_2 = z = 0.6$

Sannolikheten för [(Väg 1 eller Väg 2) och W] är då

$p = (v_1 + v_2 - v_1 \cdot v_2) \cdot w = 0.632 \cdot 0.8 = 0.5056$

Uppgift 8.

I nedanstående system fungerar komponenter K1, K2, K3, K4 oberoende av varandra, med sannolikheterna 0.90, 0.85, 0.80 respektive 0.75. Hela systemet fungerar om det finns minst en fungerande väg mellan A och B. Bestäm sannolikheten att systemet fungerar.

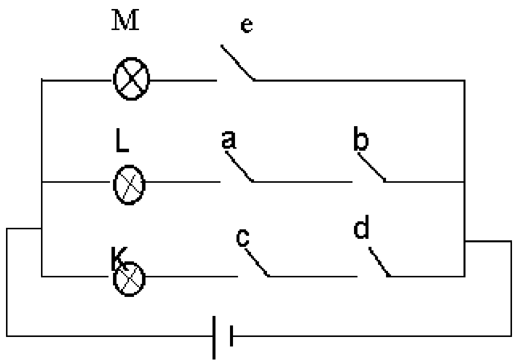


Lösning:

Väg 1 fungerar med sannolikheten v1=k1*k2= 0.765
Väg2 fungerar med sannolikheten v2=k3=0.80
Väg3 fungerar med sannolikheten v3=k4=0.75
P(Ingen väg fungerar) = q= (1– v1)(1– v2)(1– v3)= 0.01175
Sannolikheten att minst en väg fungerar är 1- P(Ingen väg fungerar)= 1– 0.01175=0.98825

Svar. 0.988

Uppgift 9.



I figuren ovan är **a, b, c, d** och **e** kontakter, som är slutna (oberoende av varandra) med sannolikheterna 0.8, 0.7, 0.6, 0.5 respektive 0.4.
Beräkna sannolikheten att
a) ingen lampa lyser, b) exakt en lampa lyser.

Lösning:

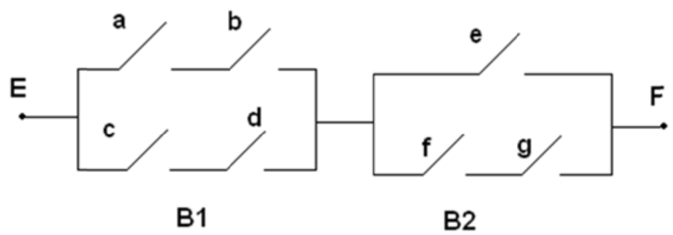
a) P_M=e=0.4, P_L=ab=0.56 P_K=CD==0.3
P(ingen lampa lyser) =$(1- P_M)\ (1- P_L)\ (1- P_K) = 0.1848$

b) **P(exakt en lampa lyser)**

$= P_M *(1- P_L) *(1- P_K)+ (1- P_M) * P_L *(1- P_K)+ (1- P_M) *(1- P_L) P_K$
=0.4376

Uppgift 10.

Vad är sannolikheten att det blir kontakt mellan punkterna E och F i nedanstående schema om reläkontakterna a,b,c, d, e, f och g slutes, oberoende av varandra med sannolikheterna 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, resp 0.7 .



Lösning:

Block B1:

$v_1 = a \cdot b = 0.02$

$v_2 = c \cdot d = 0.12$

$b1 = v_1 + v_2 - v_1 \cdot v_2 = 0.1376$

Block B2:

$v_3 = e = 0.5$

$v_4 = f \cdot g = 0.42$

$b2 = v_3 + v_4 - v_3 \cdot v_4 = 0.71$

p= $b1 \cdot b2 = 0.0976960$

Svar : Sannolikheten att det blir kontakt mellan punkterna E och F är p= 0.0976960

Uppgift 11.
Ett företag som tillverkar batterier av en viss typ har tillverkningen förlagt i fyra olika fabriker.
Fabrik A står för 40 % av tillverkningen, fabrik B 30 %, fabrik C 20%, fabrik D 10% .
Sannolikheten för att ett batteri från fabrik A är korrekt är 95 % . Motsvarande sannolikheten för ett korrekt batteri från B är 90 %, från C 85 % och från D 70 %.
Man köper ett batteri och finner att det är korrekt.
Vad är sannolikheten att det tillverkats i fabrik C?

Lösning:

P(korrekt)=0.40*0.95+0.30*0.90+0.20*0.85+0.10*0.70= 0.89 (den totala sannolikheten för korrekt)

P(C|korrekt) $= \dfrac{P(C \cap korrekt)}{P(korrekt)} = \dfrac{0.20 \cdot 0.85}{0.89} = 0.191$

Svar 2 : 0.191

Uppgift 12.
Ett företag som tillverkar batterier har tillverkningen förlagd till fyra olika fabriker. Fabrik A står för 20% av tillverkningen, fabrik B 12%, fabrik C 33% och fabrik D 35%. Man vet att ett batteri från fabrik A har 75 % sannolikhet att räcka mer än 20 drifttimmar. Motsvarande sannolikheter för fabrikerna B och C och D är 80 %, 85 % respektive 90 %.
Man har blandat batterier från de fyra fabrikerna i ett stort centralt lager.
a) Vad är sannolikheten att ett batteri som tas på måfå ur lagret skall räcka mer än 20 drifttimmar
b) Man tar på måfå ett batteri ur lagret och finner att det räcker mer än 20 drifttimmar. Vad är sannolikheten att det tillverkats i fabrik C ?

Lösning:
a) P(korrekt)=$0.20 \cdot 0.75 + 0.12 \cdot 0.80 + 0.33 \cdot 0.85 + 0.35 \cdot 0.90$
= 0.8415 (total sannolikhet)

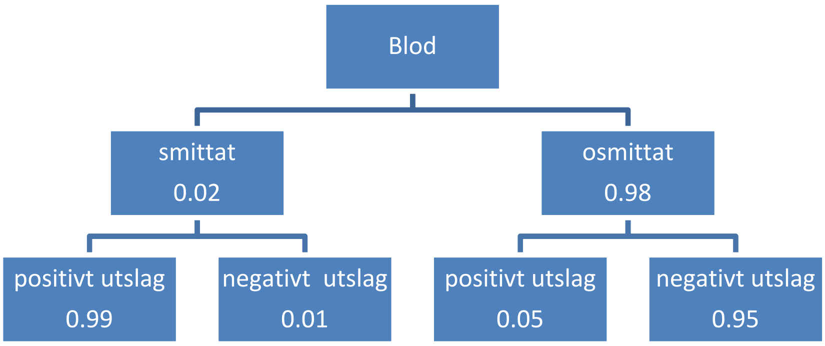
b) $P(C|\text{korrekt}) = \dfrac{0.33 \cdot 0.85}{0.8415} = 0.3333$

Uppgift 13.

Ett nytt test av blod ger
positivt utslag i 99% av fallen för smittat blod och
negativt utslag i 95% av fallen för osmittat blod.
Av erfarenhet vet man att cirka 2% av alla prover som genomförs har smittat blod.
Vad är sannolikheten att ett blodprov som har gett positivt utslag verkligen är smittat?

Lösning:

Låt S vara händelsen att blodprovet är verkligen smittat.
Låt O vara händelsen att blodprovet är verkligen osmittat.
Låt POS vara händelsen att blodprovet ger positivt utslag .
Låt NEG vara händelsen att blodprovet ger negativt utslag .



Då gäller:
Den totala sannolikheten för positivt utslag är

$$P(POS) = P(S) \cdot P(POS \mid S) + P(O) \cdot P(POS \mid O) =$$

$$0.02 \cdot 0.99 + 0.98 \cdot 0.05 = 0.0688$$

Härav

$$P(S \mid POS) = \frac{P(POS \cap S)}{P(POS)} = \frac{P(S) \cdot P(POS \mid S)}{P(POS)} = \frac{0.02 \cdot 0.99}{0.0688} \approx 0.28779$$

Svar: $\approx 28.8\%$

Uppgift 14.

Sannolikheten för att en person har en viss sjukdom beror på åldern. (2p)
För hela befolkningen gäller:

Ålder	del av befolkningen	har sjukdomen med sannolikheten
0-17 år	21%	0,010
18-40år	27%	0,015
41-60 år	30%	0,030
60-	22%	0,050

Beräkna sannolikheten för att en slumpmässigt vald person som har sjukdomen är mellan 18 och 40 år.

Lösning:

$$\text{A : En person är } 18-40\text{ ,}\qquad \text{B : En person är sjuk}$$

$$Sökt : P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=$$

$$=\frac{0{,}27\cdot 0{,}015}{0{,}21\cdot 0{,}010+0{,}27\cdot 0{,}015+0{,}30\cdot 0{,}030+0{,}22\cdot 0{,}050}=\underline{0{,}155}$$

==

Några exempel med statistisk kontroll:

Uppgift 15. Vid en statistisk mottagningskontroll skall man avvisa eller acceptera inkommande partier om 40 enheter vardera. Man använder följande tvåstegsförfärande. Först väljs 4 enheter på måfå ur partiet. Om någon av dessa är defekt så avvisas partiet. Om ingen är defekt väljer man på måfå ut ytterligare 10 enheter bland de återstående 36. Om någon av dessa är defekt så avvisas partiet, i annat fall accepteras det. Vad är sannolikheten att avvisa ett parti som innehåller 4 defekta enheter?

Lösning:

Metod 1: P(avvisa)=1-P(acceptera)= 1-P(Test1 OK)*(Test2 OK |Test1 OK)

$$=1-\frac{\binom{4}{0}\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}}\cdot\frac{\binom{4}{0}\binom{32}{10}}{\binom{36}{10}}\approx 0.836$$

$$\textbf{Svar :}\ 1-\frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}}\frac{\binom{32}{10}}{\binom{36}{10}}\approx 0.836$$

Metod 2: P(avvisa)= P(avvisa I Test1) + P(avvisa i Test2)=
1-P(Test1 OK) + P(Test1 OK)*(1-Test2 OK)

TEST1:

P(alla 4 korrekta i Test1)=**p1**=$\frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}}$

minst en defekt i Test1=1-P(alla 4 korrekta i Test1)=$1-\frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}}$

TEST2:
p2= P(minst en defekt i Test2 betingat att alla är korrekta i TEST1)=

$$\frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}}\cdot(1-\frac{\binom{32}{10}}{\binom{36}{10}})$$

Sannolikheten att avvisa ett parti är **p1+p2**=$(1-\frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}})+\frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}}\cdot(1-\frac{\binom{32}{10}}{\binom{36}{10}})\approx 0.836$

Svar: $(1-\frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}})+\frac{\binom{36}{4}}{\binom{40}{4}}\cdot(1-\frac{\binom{32}{10}}{\binom{36}{10}})\approx 0.836$

Uppgift 16.

Vid en statistisk mottagningskontroll skall man avvisa eller acceptera inkommande partier om 12 enheter vardera. Man använder följande tvåstegsmetod. Först väljs 3 enheter på måfå ur partiet. Om någon av dessa är defekt så avvisas partiet. Om ingen är defekt väljer man på måfå ut ytterligare 4 bland de återstående 9. Om högst en av dessa är defekt så accepteras partiet. Vad är sannolikheten att acceptera ett parti som innehåller 4 defekta (och 8 korrekta) enheter?

Lösning:

Vi betecknar

T_1= partiet accepteras vid första steget. (Alla tre enheter korrekta)

T_2= partiet accepteras vid andra steget. (Högst en defekt)

Partiet accepteras om det passerar båda steg.

$$P(T_1\cap T_2)=P(T_1)\cdot P(T_2\,|\,T_1)=\frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}}\cdot\left\{\frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{5}{4}}{\binom{9}{4}}+\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{3}}{\binom{9}{4}}=\right\}$$

$$=\frac{14}{55}\cdot\frac{5}{14}=\frac{1}{11}\approx 0.090909$$

Svar: 0.090909