Centrala gränsvärdessatsen

Väntevärdet och variansen för en linjär kombination av stokastiska variabler beräknas enligt följande:

S 2.1 Låt $c_1, c_2, \ldots, c_n$ vara konstanter, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ stokastiska variabler, $E(\xi_i)=\mu_i$ och $V(\xi_i)=\sigma_i^{\,2}$. Då gäller:

1. $E(c_1\xi_1 + c_2\,\xi_2 + \ldots + c_n\,\xi_n) = c_1\mu_1 + c_2\,\mu_2 + \ldots + c_n\,\mu_n$,
2. $V(c_1\xi_1 + c_2\,\xi_2 + \ldots + c_n\,\xi_n) = c_1^{\,2}\sigma_1^{\,2} + c_2^{\,2}\,\sigma_2^{\,2} + \ldots + c_n^{\,2}\sigma_n^{\,2}$ om $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ är oberoende

En linjär kombination av oberoende normalfördelade s. v. är också normalfördelad s.v:

S 2.2 Låt $c_1, c_2, \ldots, c_n$ vara konstanter, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ oberoende stokastiska variabler och $\xi_i \in N(\mu_i, \sigma_i)$. Då gäller:

$$c_1\xi_1 + c_2\,\xi_2 + \ldots + c_n\,\xi_n \in N\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i\mu_i\ ,\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^{\,2}\sigma_i^{\,2}}\Big)$$

S 2.3 Låt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vara oberoende stokastiska variabler och $\xi_i \in N(\mu, \sigma)$. Då gäller:

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \in N(n\cdot\mu,\ \sigma\sqrt{n})$$

S 2.4 Låt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vara oberoende stokastiska variabler och $\xi_i \in N(\mu, \sigma)$. Då gäller:

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} \in N\Big(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)$$

Centrala gränsvärdessatsen

Om $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ INTE är normalfördelade då gäller ovanstående formler APPROXIMATIVT (enligt nedanstående centrala gränsvärdessatsen) .

S 2.5 (Centrala gränsvärdessatsen) Låt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vara oberoende stokastiska variabler med samma sannolikhetsfördelning med väntevärdet μ och standardavvikelsen σ. Då gäller:

1. $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ är approximativt $N(n\cdot\mu,\ \sigma\sqrt{n})$ fördelad då *n* är stort.
2. $\dfrac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n}$ är approximativt $N\Big(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big)$ fördelad då *n* är stort.

Uppgift 1. Låt X_1, X_2, X_3 vara normalfördelade och oberoende s.v. sådana att

$E(X_1) = \mu_1 = 10$, $E(X_2) = \mu_2 = 20$, $E(X_3) = \mu_3 = 5$;

$D(X_1) = \sigma_1 = 1$, $D(X_2) = \sigma_2 = 2$, $D(X_3) = \sigma_3 = 1$;

och $Y = X_1 + 2X_2 - 2X_3$

Beräkna sannolikheten P(Y ≤ 50)

Lösning:

a) $E(Y) = 1E(X_1) + 2E(X_2) - 2E(X_3) = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 - 2 \cdot 5 = 40$

$V(Y) = 1^2(\sigma_1)^2 + 2^2(\sigma_2)^2 + (-2)^2(\sigma_3)^2 = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 21$

$D(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{21}$

Därför $Y \in N(40, \sqrt{21})$ =N(40, 4.58)

P(Y ≤ 50) = F(50)= Φ((50-40)/4.58)= Φ(2.18)= 0.985

Svar: 0.985

Uppgift 2. Vid tillverkning av motstånd av en viss typ blir resistansen N(40,2) fördelad (enhet kiloohm). Vad är sannolikheten att 9 seriekopplade sådana motstånd skall få en resistans mellan 354 och 366 kiloohm?

Lösning:

$m = E(\xi_k) = 40, \qquad s = 2$

Låt $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_9$.

Då gäller $\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_9 \in N(9 \cdot m,\ s\sqrt{n})$ (formelblad)

d v s $\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_9 \in N(360,6)$

$$P(354 < \xi < 366) = F(366) - F(354) = \Phi(\frac{366-360}{6}) - \Phi(\frac{354-360}{6})$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.6826$$

Svar: 0.6826

Uppgift 3. I ett kontorshus finns en hiss med anslaget ”max 6 personer eller 500 kg”. Vi vill därför veta hur stor sannolikheten är att hissen överlastas. Anta att vikten av en anställd är normalfördelad med väntevärde 80 kg och standardavvikelse 10 kg. Olika personers vikt är oberoende. Beräkna sannolikheten att vikten av 5 personer överskrider 500 kg.

Lösning:

Låt ξ beteckna total vikt av 5 personer, då

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5$$

där $\xi_k \in N(80, 10)$.

Därför $\xi \in N(5 \cdot 80, 10\sqrt{5}) = N(400,\ \ 22.36)$

$$P(\xi > 500) = 1 - P(\xi \le 500) = 1 - F(500) = 1 - \Phi(\frac{500-400}{22.36}) = 1 - \Phi(4.47)$$
$$\approx 1 - 1 = 0$$

Svar: Sannolikheten är ≈ 0

Uppgift 4.

Vid tillverkning av kolvar och cylindrar kan diametern för en viss typ av kolv betraktas som en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärdet 8,10 mm och standardavvikelsen 0,12 mm. För cylindrarna kan hålets diameter betraktas som en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärdet 8,35 mm och standardavvikelsen 0,16 mm. En cylinder anses passa till en kolv om hålets diameter större än kolvens diameter och om skillnaden ej överstiger 0,6 mm. Hur stor är sannolikheten att kolven passar till cylindern vid ett slumpmässigt val?

Lösning:

$X \in N(8{,}35; 0{,}16) \qquad Y \in N(8{,}10; 0{,}12)$

$Z = X - Y \in N(0{,}25; \sqrt{0{,}16^2 + 0{,}12^2})$

$P(0 \le Z \le 0{,}6) = P(Z \le 0{,}6) - P(Z \le 0) =$

$$\Phi(\frac{0{,}6 - 0{,}25}{0{,}2}) - \Phi(\frac{0 - 0{,}25}{0{,}2}) = \Phi(1{,}75) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}8543$$

Svar: 0,8543

Uppgift 5.

En teknolog vet av erfarenhet att hans morgonaktivitet kan struktureras på följande sätt:

Tvättning och påklädning, vilket tar ξ_1 minuter, där . $\xi_1 \in N(4{,}1)$

Frukost, vilket tar ξ_2 minuter, där $\xi_2 \in N(15{,}2)$.

Promenad till skolan, vilket tar ξ_3 minuter, där $\xi_3 \in N(5{,}2)$.

På grund av detta ställer han en kväll väckarklockan på ringning kl 8:00 i förhoppning att hinna till första lektionen kl 8:30. Hur stor är sannolikheten att han lyckas?

Lösning:

Låt $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$.

Då gäller $\xi \in N(4 + 15 + 5, \sqrt{1 + 4 + 4})$ dvs $\xi \in N(24{,}3)$

Teknologen kommer i tid om $\xi \le 30$.

$$P(\xi \le 30) = F(30) = \Phi(\frac{30 - 24}{3}) = \Phi(2) = 0.9772$$

Svar: 0.9772

Uppgift 6. (Centrala gränsvärdessatsen) Längden hos en viss typ av byggnadselement, mätt i cm, är en s.v (ej normalfördelad) med medelvärdet 25 och standardavvikelsen $\sqrt{0.4}$. Man lägger 20 slumpmässigt valda element intill varandra. Hur stor är sannolikheten att deras sammanlagda längd överstiger 505 cm?

Lösning:

Kalla längderna $\xi_1, \ldots \xi_{20}$. Man får

$$X = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{20} \text{ är approximativt } N(20 \cdot 25, \sqrt{20 \cdot 0.4}) = N(500, \sqrt{8})$$

$$P(X > 505) = 1 - \Phi(\frac{505 - 500}{\sqrt{8}}) = 1 - \Phi(1.77) = \underline{\underline{0.038}}$$

Uppgift 7. (Centrala gränsvärdessatsen) Flygpassagerarna från en stor stad har en kroppsvikt som kan betraktas som en s. v. med väntevärdet 80 kg och standardavvikelsen 5 kg. Hur stor är sannolikhet att 49 sådana passagerare väger mer än 4000 kg?

Lösning:

$m = E(\xi_k) = 80, \qquad s = 5$

Låt $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_{49}$.

Då gäller $\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_{49}$ är approximativt $N(49 \cdot m,\ s\sqrt{49})$ (formelblad)

d v s $\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_{49}$ är approximativt $N(3920, 35)$

$$P(\xi > 4000) = 1 - F(4000) = 1 - \Phi(\frac{4000 - 3920}{35}) =$$

$$1 - \Phi(\frac{80}{35}) \approx 1 - 0.9889 = 0.0111$$

Svar: 0.0111

Uppgift 8.

Livslängden hos en viss komponent är en exponentialfördelad stokastisk variabel med parameter $\lambda = 0.02$ (tiden räknas i timmar). En sådan komponent ingår i en radarutrustning på ett fartyg. När en komponent går sönder byts den genast ut mot en ny. Beräkna en tid T sådan att lagret med 64 sådana komponenter räcker åtminstone denna tid med sannolikhet 0.95

Lösning:

Låt ξ_k beteckna livslängden hos komponenten k.

Eftersom $\xi_k \in Exp(\lambda)$ får vi

$$m = E(\xi_k) = \frac{1}{\lambda} = 50,$$

$$s = \frac{1}{\lambda} = 50$$

Låt $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_{64}$.

Då gäller enligt centrala gränsvärdessatsen

$\xi \in N(64 \cdot m,\ s\sqrt{64})$

d v s

$\xi \in N(3200,\ 400)$

Vi får då

$$P(\xi \geq T) = 0.95 \Rightarrow 1 - F(T) = 0.95 \Rightarrow F(T) = 0.05 \Rightarrow$$

$$\Phi(\frac{T - 3200}{400}) = 0.05 \Rightarrow$$

$$\frac{T - 3200}{400} = -1.6449 \Rightarrow$$

$$T = 3200 - 400 \cdot 1.6449 \Rightarrow T = 2542$$

Svar: 2542 timmar

Uppgift 9.

Till en betongblandning behövs 2000 kg torrt bruk som levereras i säckar som väger c:a 120 kg. Varje säcks massa är N(120, 40)-fördelade i enheten kg.

a) Hur stor är sannolikheten att 14 säckar räcker?

b) Hur många säckar behöver man beställa om man vill att sannolikheten för att bruket skall räcka skall vara minst 90 %?

Lösning:

$\xi =$ varje säcks massa i enheten kg $\quad \xi \in N(120,40)$

$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + ... + \xi_{14} \qquad \textit{total massa}$

$\textit{sökt}: P(\eta \geq 2000)$

$E(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + ... + \xi_{14}) = 14 \cdot 120\ kg = 1680\ kg$

$V(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + ... + \xi_{14}) = 14 \cdot 40^2$

$\sigma = 40 \cdot \sqrt{14}\ kg$

$CGS: \eta \in N(1680, 40 \cdot \sqrt{14})$

$$P(\eta \geq 2000) = 1 - P(\eta \leq 2000) = 1 - \phi(\frac{2000 - 1680}{40\sqrt{14}}) = 1 - \phi(2{,}14) = 1 - 0{,}9838 = 0{,}016$$

b) (Svårare delen)

$E(\eta) = n \cdot 120 \quad V(\eta) = n \cdot 40^2 \quad \sigma = 40 \cdot \sqrt{n}$

$CGS: \eta \in N(n \cdot 120, 40 \cdot \sqrt{n})$

$P(\eta \geq 2000) = 0{,}90 \qquad P(\eta \leq 2000) = 0{,}10$

$$\phi(\frac{2000 - 120 \cdot n}{40\sqrt{n}}) = 0{,}10$$

Från formelsamlingen har vi

$$\frac{2000 - 120 \cdot n}{40\sqrt{n}} = -1{,}28\ ,$$

$$\frac{50 - 3 \cdot n}{\sqrt{n}} = -1{,}28 \qquad \textit{substitution}: t = \sqrt{n}$$

$$\frac{50 - 3 \cdot t^2}{t} = -1{,}28$$

$$3 \cdot t^2 - 1{,}28t - 50 = 0$$

$t = 0.213 \pm 4{,}08\ ,\ t > 0 \quad \Rightarrow\ t = 4{,}3 \quad n = 4{,}3^2 = 18{,}5$

Svar: 19

Uppgift 10.

Vid tillverkning av skruvar och muttrar kan diametern för en viss typ av skruv betraktas som en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärdet 8,10 mm och standardavvikelsen 0,12 mm. För muttrarna kan hålets diameter betraktas som en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärdet 8,35 mm och standardavvikelsen 0,16 mm. En skruv anses passa till en mutter om hålets diameter är större än skruvens diameter och om skillnaden ej överstiger 0,6 mm. Hur stor är sannolikheten att mutter passar till skruven vid ett slumpmässigt val?

Lösning

$\xi \in N(8{,}35; 0{,}16)\ , \qquad \eta \in N(8{,}10; 0{,}12)\ , \qquad X = \xi - \eta \in N(0{,}25; \sqrt{0{,}16^2 + 0{,}12^2})$

$$P(0 \leq X \leq 0{,}6) = P(X \leq 0{,}6) - P(X \leq 0) = \Phi(\frac{0{,}6 - 0{,}25}{0{,}2}) - \Phi(\frac{0 - 0{,}25}{0{,}2})$$

$= \Phi(1{,}75) - \Phi(-1{,}25) = 0{,}9599 - 0{,}1056 = 0{,}85$

Uppgift 11.

En ideell förening planerar en insamling och skickar därför till var och en av de 1000 medlemmarna ett brev, i vilket man ber om ett bidrag på 50 eller 100 kronor. Från tidigare erfarenhet gör man uppskattningen att det är lika vanligt med det större som det mindre bidraget och att 20% av medlemmarna inte ger något bidrag alls.
Beräkna, med en lämplig approximation, sannolikheten att föreningen får in minst 58 000kr.

Lösning:

$\xi = antal\ \ kronor\ /\ person$

$E(\xi) = 0{,}2\cdot 0 + 0{,}40\cdot 50 + 0{,}40\cdot 100 = 60\ kr$

$V(\xi) = 0{,}20\cdot(0-60)^2 + 0{,}40\cdot(50-60)^2 + 0{,}40\cdot(100-60)^2 = 1400$

$\sigma = 37{,}4\ kr$

$\mathrm{X} = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{1000}$

$(Summan\ blir\ en\ s.v.\ \mathrm{X}\ som\ enligt\ CGS\ är\ approx.\ normalfördelad)$

$E(\mathrm{X}) = 1000\cdot 60\ kr = 60000\ kr$

$V(\mathrm{X}) = V(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{1000}) = 1000\cdot 1400$

$\sigma_{\mathrm{X}} = 1183\ kr$

$CGS: \mathrm{X} \in N(60000{,}1183)$

$$P(\mathrm{X} \geq 58000) = 1 - P(\mathrm{X} < 58000) = 1 - \phi(\frac{58000-60000)}{1183}) = 1 - \phi(-1{,}69) = 0{,}95$$