KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag till tentamen 2010-10-22

Del A

(1) Uttrycket

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 3, 0) + t(0, 5, 1)$$

definierar ett plan W i rummet där s och t är reella parametrar.

(a) Bestäm en normalvektor till planet med hjälp av kryssprodukten av de bägge riktningsvektorerna $(1, 3, 0)$ och $(0, 5, 1)$. **(1)**

(b) Bestäm en ekvation för planet W på formen $ax + by + cz + d = 0$. **(2)**

(c) Bestäm det kortaste avståndet från planet W till origo, exempelvis genom att projicera vektorn från origo till punkten $(1, 1, 1)$ på normalvektorn till planet. **(1)**

Lösning. (a) Planets normalriktning ges av vektorprodukten mellan två icke-parallella tangentvektorer. Två sådana vektorer är $(1, 3, 0)$ och $(0, 5, 1)$. Vi noterar att

$$(1, 3, 0) \times (0, 5, 1) = (3 \cdot 1 - 0 \cdot 5, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 5 - 3 \cdot 0) = (3, -1, 5).$$

(b) Eftersom normalvektorn ger oss koefficienterna a, b och c i planets ekvation $ax + by + cz + d$, kommer ekvationen att kunna skrivas

$$3x - y + 5z + d = 0.$$

Vi får d genom att stoppa in koordinaterna för en punkt i planet. En sådan punkt är $(1, 1, 1)$, vilket ger

$$3 - 1 + 5 + d = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d = -7.$$

Ekvationen för planet är alltså

$$3x - y + 5z - 7 = 0.$$

(c) Kortaste vägen från origo till planet går längs planets normalriktning. Den punkt på planet som ligger närmast origo är alltså på formen $k(3, -1, 5) = (3k, -k, 5k)$. Ekvationen för planet ger att

$$3(3k) - (-k) + 5(5k) - 7 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 35k = 7 \quad \Longleftrightarrow \quad k = 1/5.$$

Punkten är alltså $\frac{1}{5}(3,-1,5)$, och avståndet till origo är lika med normen av denna punkt:

$$\|\frac{1}{5}(3,-1,5)\| = \frac{1}{5}\sqrt{3^2+1^2+5^2} = \frac{\sqrt{35}}{5}.$$

Vi kan också beräkna detta genom att projicera vektorn från origo till $(1,1,1)$ på normalvektorn. Då får vi en vektor från origo till den punkt i planet som ligger närmast origo.

$$\mathrm{proj}_{(3,-1,5)}(1,1,1) = \frac{(1,1,1)\cdot(3,-1,5)}{(3,-1,5)\cdot(3,-1,5)}(3,-1,5) = \frac{7}{35}(3,-1,5) = \frac{1}{5}(3,-1,5).$$

På nytt är avståndet normen av denna vektor.
Ytterligare ett sätt är att använda formeln för avståndet mellan en punkt (x_0,y_0,z_0) och ett plan $ax+by+zc+d=0$:

$$\text{avståndet} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

I uppgiften är $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$ och $(a,b,c,d) = (3,-1,5,-7)$, vilket ger avståndet

$$\frac{|3\cdot 0-1\cdot 0+5\cdot 0-7|}{\sqrt{3^2+1^2+5^2}} = \frac{7}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{35}}{5}.$$

$\square$

Svar:

(a) Planets ekvation är $3x-y+5z-7=0$.
(b) Avståndet är $\sqrt{35}/5$.

(2) Låt T vara avbildningen från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som relativt standardbasen har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Beskriv i ord vad T gör. **(1)**

(b) Vilken matrisrepresentation får T i basen $B = \{(2,1), (-1,2)\}$? **(3)**

Lösning. (a) T roterar planet 90 grader medsols. Det räcker att se på vad T gör med standardbasvektorerna $(1,0)$ och $(0,1)$ och vi får att

$$T(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

och

$$T(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Basbytesmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

med de nya basvektorerna som kolumner avbildar vektorer med koordinater i nya basen till vektorer med koordinater i standardbasen. Inversen

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

konverterar åt andra hållet. Relativt den nya basen representeras T av matrisen

$$B^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi kan också se direkt på vad T gör med basvektorerna i B:

$$T(2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

och

$$T(-1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Alltså avbildas den första basvektorn på minus den andra och den andra avbildas på den första, vilket innebär att matrisen är

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Svar:

(a) T roterar planet 90 grader medsols.

(b) I den nya basen B representeras T av matrisen

$$[T]_{B,B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) (a) Använd Gausselimination för att bestämma en bas för nollrummet till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3)

(b) Använd räkningarna från del (a) för att bestämma dimensionen för kolonnrummet till A, dvs *rangen*[1] av A. **(1)**

Lösning. (a) För att hitta en bas för kolonnrummet till A löser vi det homogena systemet som svarar mot ekvationen $A\mathbf{x} = 0$. Med Gausselimination på totalmatrisen får vi

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_2 \\ r_1 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - 3r_1 \\ r_3 \\ r_4 - r_1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & -10 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -\frac{1}{8}r_2 - 3r_1 \\ r_3 + \frac{1}{2}r_2 \\ r_4 - \frac{1}{2}r_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser att x_3 och x_4 är fria variabler eftersom motsvarande kolonner saknar ledande ettor. Därför inför vi parametrar s och t och får $x_3 = s$, $x_4 = t$. Ur andra ekvationen kan vi sedan lösa ut x_2 som

$$x_2 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{4}x_4 = \frac{1}{2}s - \frac{5}{4}t$$

och sedan ur den första

$$x_1 = -3x_2 - 4x_4 = -\frac{3}{2}s + \frac{15}{4}t - 4t = -\frac{3}{2}s - \frac{1}{4}t.$$

Därmed kan alla lösningar skrivas som

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{3}{2}s - \frac{1}{4}t, \frac{1}{2}s - \frac{5}{4}t, s, t\right) = s(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0) + t(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, 0, 1)$$

[1]eng. *rank*

och vektorerna $(-3/2, 1/2, 1, 0), (-1/4, -5/4, 0, 1)$ utgör en bas för nollrummet till A.

(b) Enligt en känd sats från boken är summan av rangen och nollrumsdimensionen för en matris lika med antalet kolonner, och eftersom nollrummets dimension är 2 enligt (a) får vi att kolonnrummets dimension är $4 - 2 = 2$.
Vi kan också se rangen från antalet ledande ettor efter att vi utfört Gausseliminationen i (a) och därmed får vi också att rangen är 2.

$\square$

Svar:

(a) En bas för nollrummet ges av exempelvis $\{(-3/2, 1/2, 1, 0), (-1/4, -5/4, 0, 1)\}$.

(b) Kolonnrummets dimension är 2.

DEL B

(4) Visa hur Gram-Schmidts metod fungerar genom att bestämma en ortonormal bas för det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $(1,0,0,1)$, $(1,1,1,1)$, $(3,3,1,3)$. (Använd den vanliga euklidiska inre produkten, dvs $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.) **(4)**

Lösning. Låt $\mathbf{u}_1 = (1,0,0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (1,1,1,1)$ och $\mathbf{u}_3 = (3,3,1,3)$ vara vektorerna som utgör den givna basen för W. Vi bildar nu successivt en ny ortogonal bas utifrån dessa bestående av tre vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$.

Gram-Schmidts metod börjar med att vi väljer $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$. Nästa vektor $\mathbf{v}_2$ ska tillsammans med $\mathbf{v}_1$ spänna upp samma delrum som $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$, men vara ortogonal mot $\mathbf{v}_1$. Detta åstadkommer vi genom att dra bort projektionen av $\mathbf{u}_2$ på $\mathbf{v}_1$ från $\mathbf{u}_2$. Detta innebär att vi tar den *komposant* av $\mathbf{u}_2$ som är vinkelrät mot $\mathbf{v}_1$.

Vi beräknar

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \operatorname{proj}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{u}_2 = (1,1,1,1) - \tfrac{(1,1,1,1)\cdot(1,0,0,1)}{(1,0,0,1)\cdot(1,0,01)}(1,0,0,1)\\ &= (1,1,1,1) - \tfrac{2}{2}(1,0,0,1) = (0,1,1,0).\end{aligned}$$

Vi ska sedan gå vidare och ersätta $\mathbf{u}_3$ med en vektor som tillsammans med $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ spänner upp W, men som också är ortogonal mot det delrum som spänns upp av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$. Eftersom $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ utgör en ortogonal bas för detta delrum får vi

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \operatorname{proj}_{\mathbf{v}_1} - \operatorname{proj}_{\mathbf{v}_2}\mathbf{u}_3$$

dvs

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_3 &= (3,3,1,3) - \tfrac{(3,3,1,3)\cdot(1,0,0,1)}{(1,0,0,1)\cdot(1,0,0,1)}(1,0,0,1) - \tfrac{(3,3,1,3)\cdot(0,1,1,0)}{(0,1,1,0)\cdot(0,1,1,0)}(0,1,1,0)\\ &= (3,3,1,3) - \tfrac{6}{2}(1,0,0,1) - \tfrac{4}{2}(0,1,1,0) = (0,1,-1,0)\end{aligned}$$

För att nu få en ortonormal bas behöver vi *normera* basvektorerna och får då eftersom $||\mathbf{v}_1||^2 = ||\mathbf{v}_2||^2 = ||\mathbf{v}_3||^2 = 2$ att

$$B = \{(1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)\}$$

utgör en ortonormal bas för W. □

Svar: Gram-Schmidts metod leder till den ortogonala basen

$$B = \{(1/\sqrt{2}, 0, 0, 1/\sqrt{2}), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)\}.$$

(5) Betrakta matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -30 & -11 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att vektorerna $\mathbf{e} = (-2, 5)$ och $\mathbf{f} = (1, -3)$ är egenvektorer till B, och bestäm deras tillhörande egenvärden. **(1)**

(b) Uttryck vektorn $\mathbf{u} = (-8, 22)$ som en linjärkombination av $\mathbf{e}$ och $\mathbf{f}$. **(2)**

(c) Beräkna $B^{43}\mathbf{u}$ med hjälp av resultaten från (a) och (b). **(1)**

Lösning. (a) Vi utför matrismultiplikationerna $B\mathbf{e}$ och $B\mathbf{f}$, och erhåller

$$\begin{aligned} B\mathbf{e} &= \begin{bmatrix} -22+20 \\ 60-55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \mathbf{e} \\ B\mathbf{f} &= \begin{bmatrix} 11-12 \\ -30+33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -\mathbf{f}. \end{aligned}$$

Per definition har vi att $\mathbf{e}$ och $\mathbf{f}$ är egenvektorer till B, med respektive egenvärden 1 och -1.

(b) Vi vill skriva vektorn $\mathbf{u} = (-8, 22)$ som en linjär kombination $a\mathbf{e} + b\mathbf{f}$. Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} -8 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

vilket vi skriver som $\mathbf{u} = P \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Inversen till matrisen P är

$$P^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Detta ger

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

(c) Vi har från uppgifterna ovan att $\mathbf{u} = 2\mathbf{e} - 4\mathbf{f}$, där $\mathbf{e}$ och $\mathbf{f}$ är egenvektorer med egenvärden 1 och -1. Detta ger att

$$\begin{aligned} B^{43}\mathbf{u} &= 2 \cdot B^{43} \cdot \mathbf{e} - 4 \cdot B^{43} \cdot \mathbf{f} \\ &= 2(1)^{43}\mathbf{e} - 4(-1)^{43}\mathbf{f} = 2\mathbf{e} + 4\mathbf{f} = 2(-2, 5) + 4(1, -3) = (0, -2). \end{aligned} \tag{2}$$

Dvs, $B^{43}\mathbf{u} = (0, -2)$.

Alternativt kan vi för göra det genom att vi från uppgifterna (a) och (b) har vi att matrisen B är diagonaliserbar, och att

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = P^{-1}BP.$$

Specielt har vi att $PDP^{-1} = B$. Därmed är

$$B^{43}\mathbf{u} = PD^{43}P^{-1}\mathbf{u}.$$

Vi har att $D^{43} = D$, och från (1) har vi att $P^{-1}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$. Detta ger att

$$\begin{aligned} B^{43}\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

Svar:

(a) Se ovan.

(b) $(-8, 22) = 2\mathbf{e} - 4\mathbf{f}$.

(c) $B^{43}\mathbf{u} = (0, -2)$.

(6) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

där a är en positiv konstant. Bestäm a så att $\mathbb{R}^2$ har en ortogonal bas bestående av egenvektorer till matrisen $B = P^{-1}AP$. Ange även en sådan bas. **(4)**

Lösning. Vi kan bilda en ortogonal bas av egenvektor till en given matris B om och endast om B är symmetrisk. Nu är

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 6/a & 5 \end{pmatrix}.$$

Denna matris är symmetrisk om och endast om

$$2a = 6/a \quad \Longleftrightarrow \quad a^2 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \pm\sqrt{3}.$$

Eftersom a är positivt, måste vi ha att $a = \sqrt{3}$. Vi får att

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 5. \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiska polynomet till B är

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 5) - 12 = \lambda^2 - 6\lambda - 7.$$

Nollställena till detta polynom ges av

$$\lambda = 3 \pm \sqrt{3^2 + 7} = 3 \pm 4,$$

Egenvärdena är alltså $\lambda_1 = 7$ och $\lambda_2 = -1$.

Egenvektorerna hörande till egenvärdet $\lambda_1 = 7$ är lösningarna till ekvationen

$$(7I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Genom att dela första raden med $-2\sqrt{3}$ och den andra raden med 2 får vi en och samma ekvation, nämligen $-\sqrt{3} \cdot x + y = 0$. Denna ekvation har den allmänna lösningen $(x, y) = t(1, \sqrt{3})$.

Egenvektorerna hörande till egenvärdet $\lambda_2 = -1$ är lösningarna till ekvationen

$$(-I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Denna gång får vi ekvationen $x + \sqrt{3} \cdot y = 0$, vilken har den allmänna lösningen $(x, y) = t(\sqrt{3}, -1)$.

En ortogonal bas av egenvektorer ges alltså av $\{(1, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, -1)\}$. $\square$

Svar: Värdet $a = \sqrt{3}$ ger den ortogonala basen $\{(1, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, -1)\}$.

Var god vänd!

DEL C

(7) Låt planet W vara definerat av ekvationen $x+y+z=0$ och betrakta den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som definieras genom att varje punkt i $\mathbb{R}^3$ projiceras ortogonalt på planet W.

(a) Bestäm en matrisrepresentation för T med avseende på en bas där en av basvektorerna är normalvektor till planet och de andra två ligger i planet. **(1)**

(b) Använd basbytesmatris för att från svaret i (a) komma fram till standardmatrisen för avbildningen T. **(3)**

Lösning. (a) Matrisrepresentationen för avbildningen T med avseende på basen $B = \{\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, där $\mathbf{n}$ är en nollskild normalvektor till W, och vektorerna $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ är en bas för W ges av formeln

$$D = \big[[T(\mathbf{n})]_B \quad [T(\mathbf{v}_1)]_B \quad [T(\mathbf{v}_2)]_B\big].$$

Vi har uppenbarligen att $T(\mathbf{n}) = 0, T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$ och att $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$. Detta ger matrisen

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Vi har sambandet $A = PDP^{-1}$, där A är standardmatrisen till avbildningen T, och där P är basbytesmatrisen

$$P = P_{B \to S}$$

från basen B till standardbasen S. Basen B väljer vi konkret att vara

$$\mathbf{n} = (1,1,1), \quad \mathbf{v}_1 = (1,0,-1) \quad \mathbf{v}_2 = (0,1,-1).$$

Matrisen P har vektorerna $\mathbf{n}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sina koordinater som respektive första, andra och tredje kolonn. Vi beräknar inversen P^{-1} med Gauss-Jordan elimination, vilket ger

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Standardmatrisen ges av

$$\begin{aligned} A = PDP^{-1} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\square$

(8) På julafton kokar Algot en tallrik gröt och ställer vid husknuten. För att vara säker på att den är genomkokt mäter han temperaturen, och den är mycket riktigt 100 grader enligt termometern. Efter en timme smyger han ut och ser att tomten inte har varit där ännu, och han passar på att mäta grötens temperatur igen: 10 grader. Efter ytterligare två timmar har tomten fortfarande inte varit framme. Algot mäter temperaturen ännu en gång och nu visar termometern bara 1 grad. Tomten har fastnat i en skorsten och det tar ytterligare tre timmar innan han hittar fram till gröten.

Det är nollgradigt ute och enligt Newtons avsvalningslag gäller

$$T = 10^{a-bt}$$

där T är temperaturen (i grader), t är tiden (i timmar) och a och b är reella konstanter.

(a) Logaritmera avsvalningslagen till $\log_{10} T = a - bt$. Algots mätningar ger tre ekvationer men vi har bara två obekanta, a och b. Vad blir a och b om man löser ekvationssystemet med minsta-kvadratmetoden? (För positiva tal x är 10-logaritmen, $\log_{10} x$, det tal som uppfyller $10^{\log_{10} x} = x$. Exempelvis är $\log_{10} 100 = 2$ eftersom $100 = 10^2$.) **(3)**

(b) Om vi ska lita på minsta-kvadratmetodens approximation, vad har gröten för temperatur när tomten kommer? Svara med ett bråk eller på decimalform. **(1)**

Lösning. (a) Ekvationssystemet kan skrivas

$$\begin{cases} a - b\cdot 0 &= \log_{10} 100 \\ a - b\cdot 1 &= \log_{10} 10 \\ a - b\cdot 3 &= \log_{10} 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a - b\cdot 0 &= 2 \\ a - b\cdot 1 &= 1 \\ a - b\cdot 3 &= 0 \end{cases}$$

eller på matrisform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi får normalekvationerna genom att multiplicera med systemmatrisens transponat från vänster,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

och uträknat,

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Detta ekvationssystem har lösning $a = 13/7$, $b = 9/14$.

(b) Enligt avsvalningslagen är grötens temperatur efter 6 timmar

$$T = 10^{\frac{13}{7} - \frac{9}{14}\cdot 6} = 10^{-2} = 0.01$$

grader.

□

Svar:

(a) $a = 13/7$ och $b = 9/14$.

(b) Grötens temperatur är 0.01 grader när tomten kommer.

(9) Låt V och W vara 3-dimensionella underrum i ett 5-dimensionellt vektorrum U. Visa att det måste finnas någon nollskild vektor $\mathbf{u}$ som tillhör både V och W. **(4)**

Lösning. Låt $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ vara en bas för V och $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ vara en bas för W. Eftersom det inte kan finnas en uppsättning av sex linjärt oberoende vektorer i ett fem-dimensionellt rum måste det finnas en linjärkombination

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 + a_4\mathbf{v}_1 + a_5\mathbf{v}_2 + a_6\mathbf{v}_3 = 0$$

där inte alla koefficenter är noll. Vi kan skriva om detta som

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = -a_4\mathbf{w}_1 - a_5\mathbf{w}_2 - a_6\mathbf{w}_3$$

och ser då att vektorn $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3$ ligger i V, men också i W, eftersom $\mathbf{u} = -a_4\mathbf{w}_1 - a_5\mathbf{w}_2 - a_6\mathbf{w}_3$. Eftersom $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ och $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ är baser kan inte $\mathbf{u}$ vara noll utan att alla koefficienter $a_1, a_2, \ldots, a_6$ är noll. Därmed är $\mathbf{u}$ en nollskild vektor som ligger både i V och i W. $\square$