KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Bedömningskriterier till tentamen
Fredagen den 22 oktober, 2010

Allmänt gäller följande:

- Om lösningen helt saknar förklarande text till beräkningar och formler ges högst två poäng. Detta markeras vid bedömningen med “FTS” (Förklarande text saknas).
- Om lösningen har förklarande text men inte tillräckligt för att det ska gå att förstå alla steg ges högst tre poäng sammanlagt på uppgiften. Detta markeras med “FLFT” (För lite förklarande text).
- Mindre räknefel ger i allmänhet inte avdrag om de inte ändrar uppgiftens karaktär eller leder till orimligheter som borde ha upptäckts.

DEL A

(1) Uttrycket

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + s(1, 3, 0) + t(0, 5, 1)$$

definierar ett plan W i rummet där s och t är reella parametrar.

(a) Bestäm en normalvektor till planet med hjälp av kryssprodukten av de bägge riktningsvektorerna $(1, 3, 0)$ och $(0, 5, 1)$. **(1)**

(b) Bestäm en ekvation för planet W på formen $ax + by + cz + d = 0$. **(2)**

(c) Bestäm det kortaste avståndet från planet W till origo, exempelvis genom att projicera vektorn från origo till punkten $(1, 1, 1)$ på normalvektorn till planet. **(1)**

Bedömning: Uppgiften ger sammanlagt antingen 4 poäng, 3 poäng eller 0 poäng.

a) – Korrekt beräknad kryssprodukt, **1 poäng**.

b) – Korrekt koppling mellan normalvektorn och ekvationen, **1 poäng**.

– Korrekt beräkning av d, **1 poäng** .

a) – Korrekt beräknat avstånd, **1 poäng**.

---

(2) Låt T vara avbildningen från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ som relativt standardbasen har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Beskriv i ord vad T gör. **(1)**

(b) Vilken matrisrepresentation får T i basen $B = \{(2,1), (-1,2)\}$? **(3)**

Bedömning: Uppgiften ger sammanlagt antingen 4 poäng, 3 poäng, 2 poäng eller 0 poäng. (Ändringen att man också kan få 2 poäng kommer sig av att uppgiften visade sig vara svårare för studenterna än vad vi hade räknat med.)

(a) Korrekt beskrivninga av vad avildningen gör med planet, **1 poäng** (Man får 1 poäng även för en andra men ändå korrekta beskrivning som till exempel ”A speglar först i linjen $x = y$ och sen i linjen $y = 0$”.)

(b)
- Korrekt metod för att bestämma matrisen för avbildningen, **1 poäng**
- Korrekt bilder av basvektorerna, **1 poäng**
- Korrekt motiverad slutsats om matrisen för avbildningen, **1 poäng**
- Två delpoäng ges om basbytet förväxlas med det omvända basbytet vid användning av $B = P^{-1}AP$, men lösningen i övrigt är korrekt.
- Två delpoäng ges om basbytet bara görs på ena sidan, dvs $B = P^{-1}A$ eller $B = AP$.

---

(3) (a) Använd Gausselimination för att bestämma en bas för nollrummet till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3)

(b) Använd räkningarna från del (a) för att bestämma dimensionen för kolonnrummet till A, dvs *rangen*[1] av A. **(1)**

Bedömning: Uppgiften ger sammanlagt antingen 4 poäng, 3 poäng eller 0 poäng.

(a)
- Korrekt påbörjad Gausselimination, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd Gausselimination, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats om bas för nollrummet utifrån resultatet av Gausseliminationen, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt motiverad dimension för kolonnrummet, **1 poäng**.

---

[1]eng. *rank*

DEL B

(4) Visa hur Gram-Schmidts metod fungerar genom att bestämma en ortonormal bas för det underrum i $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(3, 3, 1, 3)$. (Använd den vanliga euklidiska inre produkten, dvs $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.) **(4)**

Bedömning:

- Korrekt princip för hur Gram-Schmidt fungerar, **1 poäng**.
- Korrekt användning av Gram-Schmidts metod för att bestämma den andra basvektorn, **1 poäng**.
- Korrekt användning av Gram-Schmidts metod för att bestämma den tredje basvektorn, **1 poäng**.
- Korrekt normering av basvektorerna, **1 poäng**.

---

(5) Betrakta matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ -30 & -11 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att vektorerna $\mathbf{e} = (-2, 5)$ och $\mathbf{f} = (1, -3)$ är egenvektorer till B, och bestäm deras tillhörande egenvärden. **(1)**

(b) Uttryck vektorn $\mathbf{u} = (-8, 22)$ som en linjärkombination av $\mathbf{e}$ och $\mathbf{f}$. **(2)**

(c) Beräkna $B^{43}\mathbf{u}$ med hjälp av resultaten från (a) och (b). **(1)**

Bedömning:

(a) Korrekt verifiering av att vektorerna är egenvektorer med korrekt slutsats om egenvärdena , **1 poäng**.

(b)
- Korrekt idé om hur man bestämmer en linjärkombination av basvektorerna som ger $\mathbf{u}$, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av linjärkombinationen, **1 poäng** .

(c) Korrekt motiverad slutsats om $B^{43}\mathbf{u}$, **1 poäng**

---

(6) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

där a är en positiv konstant. Bestäm a så att $\mathbb{R}^2$ har en ortogonal bas bestående av egenvektorer till matrisen $B = P^{-1}AP$. Ange även en sådan bas. **(4)**

Bedömning:

- Korrekt motiverat värde på a, **1 poäng**.
- Korrekt bestämning av egenvärdena till B, **1 poäng**.
- Korrekt bestämning av egenvektorerna till B, **1 poäng** .
- Korrekt slutsats om den ortogonala basen, **1 poäng** .

DEL C

(7) Låt planet W vara definerat av ekvationen $x + y + z = 0$ och betrakta den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som definieras genom att varje punkt i $\mathbb{R}^3$ projiceras ortogonalt på planet W.

(a) Bestäm en matrisrepresentation för T med avseende på en bas där en av basvektorerna är normalvektor till planet och de andra två ligger i planet. **(1)**

(b) Använd basbytesmatris för att från svaret i (a) komma fram till standardmatrisen för avbildningen T. **(3)**

Bedömning:

a) Korrekt motiverad diagonalmatris D för T, **1 poäng**.

b)
- Korrekt bestämd basbytesmatris under förutsättning att det med symbol eller text indikeras att det är en basbytesmatris, **1 poäng**.
- Korret bestämd invers basbytesmatris, **1 poäng**.
- Korrekt användning av basbytesmatriserna för att beräkna den sökta matrisen $A = PDP^{-1}$, **1 poäng**.
- Korrekt standardmatris, men ej med angiven metod ger 1 delpoäng.

---

(8) På julafton kokar Algot en tallrik gröt och ställer vid husknuten. För att vara säker på att den är genomkokt mäter han temperaturen, och den är mycket riktigt 100 grader enligt termometern. Efter en timme smyger han ut och ser att tomten inte har varit där ännu, och han passar på att mäta grötens temperatur igen: 10 grader. Efter ytterligare två timmar har tomten fortfarande inte varit framme. Algot mäter temperaturen ännu en gång och nu visar termometern bara 1 grad. Tomten har fastnat i en skorsten och det tar ytterligare tre timmar innan han hittar fram till gröten.

Det är nollgradigt ute och enligt Newtons avsvalningslag gäller

$$T = 10^{a-bt}$$

där T är temperaturen (i grader), t är tiden (i timmar) och a och b är reella konstanter.

(a) Logaritmera avsvalningslagen till $\log_{10} T = a - bt$. Algots mätningar ger tre ekvationer men vi har bara två obekanta, a och b. Vad blir a och b om man löser ekvationssystemet med minsta-kvadratmetoden? (För positiva tal x är 10-logaritmen, $\log_{10} x$, det tal som uppfyller $10^{\log_{10} x} = x$. Exempelvis är $\log_{10} 100 = 2$ eftersom $100 = 10^2$.) **(3)**

(b) Om vi ska lita på minsta-kvadratmetodens approximation, vad har gröten för temperatur när tomten kommer? Svara med ett bråk eller på decimalform. **(1)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt uppställt överbestämt ekvationssystem, **1 poäng**.
- Korrekt uppställda normalekvationer, **1 poäng**.
- Korrekt lösning av normalekvationerna, **1 poäng**.

(b) Korrekt användning av resultatet från (a) för att bestämma temperaturen i bråkform eller decimalform, **1 poäng**.

(9) Låt V och W vara 3-dimensionella underrum i ett 5-dimensionellt vektorrum U. Visa att det måste finnas någon nollskild vektor $\mathbf{u}$ som tillhör både V och W. **(4)**

Bedömning:

- Korrekt metod för att bestämma en vektor i skärningen, **1 poäng**.
- Korrekt resonemang med linjärt oberoende, **1 poäng**.
- Korrekt slutfört bevis för att det finns en nollskild vektor i skärningen, **2 poäng**.