KTH Matematik
Examinator Lars Filipsson

Lösningsförslag!
SF1625 Envariabelanalys
Kontrollskrivning 1 den 12 november 2010
för CELTE, CENMI, CFATE, CINTE, CMIEL, CMETE, CSAMH

1. **Bestäm största och minsta värdet av funktionen $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ för x i intervallet $[-1, 0]$.**

Lösning: Funktionen är ett polynom och alltså kontinuerlig i det slutna begränsade intervallet $[-1, 0]$. Det följer att största och minsta värde existerar. Vi deriverar och får $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2$. Vi ser att $f'(x) \geq 0$ i hela det aktuella intervallet och lika med noll endast i intervallets vänstra ändpunkt. Det följer av detta att funktionen f är strängt växande i intervallet. Alltså måste funktionens minsta värde antas i intervallets vänstra ändpunkt, -1, och funktionens största värde i intervallets högra ändpunkt, 0. Funktionens minsta på det aktuella intervallet är alltså $f(-1) = 1$ och funktionens största värde är $f(0) = 2$.

Svar: Största värdet är 2 och minsta värdet är 1.

2. **Låt $f(x) = x \ln x$. Gör följande:**
A. Bestäm en ekvation för tangenten till kurvan $y = f(x)$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat 1.
B. Använd resultatet i A för att beräkna ett närmevärde till $f(1.2)$.

Lösning. Vi ser att $f(1) = 1 \cdot \ln 1 = 0$ så vi söker alltså tangentens ekvation i puntken $(1, 0)$. Vi dervierar nu och får $f'(x) = \ln x + 1$. Vi ser att $f'(1) = 1$ som är riktningskoefficient för tangenten. Med hjälp av enpunktsformeln för linjens ekvation får vi nu tangentens ekvation genom $y - 0 = 1 \cdot (x - 1)$ vilket är ekvivalent med $y = x - 1$.

För x nära 1 kan vi använda tangentens ekvation för att approximera funktionen. Dvs i det här fallet $f(x) \approx x - 1$ för x nära 1. Speciellt får vi $f(1.2) \approx 1.2 - 1 = 0.2$. Det sökta närmevärdet är alltså 0.2.

Svar A: Tangentens ekvation är $y = x - 1$

Svar B: $f(1.2) \approx 0.2$

3. **Låt $f(x) = xe^{-3x^2}$. Använd ett teckenstudium av derivatan för att bestämma alla lokala extrempunkter till f och skissa sedan kurvan $y = f(x)$.**

Lösning. Vi ser att funktionen f har definitionsmängd $\mathbb{R}$ och är kontinuerlig för alla x. Vi deriverar och får

$$f'(x) = e^{-3x^2} + xe^{-3x^2}(-6x) = (1 - 6x^2)e^{-3x^2}.$$

Vi ser att derivatan existerar för alla x. Lokala extrempunkter kan därför bara finnas i punkter där derivatan är noll. Vi söker sådana punkter:

$$f'(x) = 0 \iff (1 - 6x^2)e^{-3x^2} = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

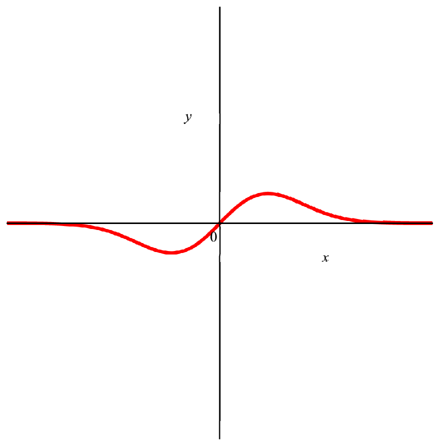
Derivatans nollställen är alltså $\pm 1/\sqrt{6}$. Vi undersöker nu derivatans tecken och ser att:

Om $x < -1/\sqrt{6}$ så är $f'(x) < 0$ och det följer att f är strängt avtagande där.

Om $-1/\sqrt{6} < x < 1/\sqrt{6}$ så är $f'(x) > 0$ och det följer att f är strängt växande där.

Om $x > 1/\sqrt{6}$ så är $f'(x) < 0$ och det följer att f är strängt avtagande där.

Det följer av ovanstående att f har två lokala extrempunkter, ett lokalt min i $x = -1/\sqrt{6}$ och ett lokalt max i $x = 1/\sqrt{6}$. Det lokala minvärdet är $f(-1/\sqrt{6}) = -1/\sqrt{6e}$ och det lokala maxvärdet är $f(1/\sqrt{6}) = 1/\sqrt{6e}$. Eftersom $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (standardgränsvärde) så är de lokala extrempunkterna också globala extrempunkter och vi kan rita kurvan som får följande utseende (max- resp minpunkten inträffar som sagt när x är $\pm 1/\sqrt{6}$):



$y = f(x)$