KTH Teknikvetenskap

SF1624 ALGEBRA OCH GEOMETRI
SEMINARIEUPPGIFT 3 — PERIOD 2 HT10

Se www.kth.se/social/course/SF1624 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

UPPGIFTER

Uppgift 1. I vart och ett av nedanstående exempel, visa att minst ett av axiomen för vektorrum inte är uppfyllt för strukturen V.

(a) V är mängden av alla vektorer (x, y) sådana att både x och y är heltal, och addition och multiplikation med skalär är definierade på sedvanligt vis.

(b) V är mängden av alla singulära 2×2-matriser, och addition och multiplikation med skalär är definierade på sedvanligt vis.

(Läs först avsnitt 4.1 och arbeta med de rekommenderade uppgifterna där. Se speciellt Exempel 7.)

Uppgift 2. Bestäm alla möjliga värden på konstanterna a och b sådana att vektorn $(1, 2, b, 0)$ ligger i det delrum av $\mathbb{R}^4$ som spänns upp av $(1, -1, 2, 0)$, $(2, 1, -1, a)$ och $(0, 0, 1, -2)$. (Läs avsnitt 4.2 om *delrum*, eller *underrum* som det också kallas. Speciellt spänner en mängd S av vektorer upp ett delrum $\operatorname{span}(S)$ enligt definition 3. Ställ upp villkoret för att den givna vektorn ligger i det delrum som spänns upp av de tre andra som ett linjärt ekvationssystem och se på när det finns lösning till detta.)

Uppgift 3. Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^5$.

(a) Är de tre vektorerna $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$, $\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + 4\mathbf{w}$ och $\mathbf{u} + 3\mathbf{v} + 9\mathbf{w}$ linjärt oberoende?

(b) Låt a, b, c och d vara reella tal sådana att $ad - bc \neq 0$. Visa att $a\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ och $b\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ är linjärt oberoende.

(Läs först avsnitt 4.3 om *linjärt oberoende* och arbeta med de rekommenderade uppgifterna där.)

Uppgift 4. Låt $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ vara standardbasen i $\mathbb{R}^2$ och låt $\mathbf{f}_1 = (4, 3)$ respektive $\mathbf{f}_2 = (3, 2)$ utgöra basvektorer i en ny bas $F = \{f_1, f_2\}$.

(a) Bestäm koordinaterna med avseende på basen F för den vektor $\mathbf{u}$ som har koordinaterna $(2, 1)$ med avseende på standardbasen.
(b) Bestäm koordinaterna med avseende på standardbasen för den vektor $\mathbf{v}$ som har koordinater $(1, -1)$ med avseende på basen F.
(c) Vilken är ekvationen i det nya systemet för den räta linje som i det gamla systemet har ekvationen $x - y = 2$?

(Läs först avsnitt 4.4 om *koordinater* och *baser* och avsnitt 4.6 om *basbyten* och arbeta med de rekommenderade uppgifterna i dessa avsnitt.)

Uppgift 5. Låt A vara en 5×7-matris som kan transformeras genom elementära radoperationer till matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Går det att hitta en bas för radrummet till A? Om det går, hitta en sådan bas.
(b) Går det att beräkna dimensionen av radrummet till A? Om det det går, beräkna den.
(c) Går det att hitta en bas för nollrummet till A? Om det det går, hitta en sådan bas.
(d) Går det att beräkna dimensionen av nollrummet till A? Om det det går, beräkna den.
(e) Går det att hitta en bas för kolonnrummet till A? Om det det går, hitta en sådan bas.
(f) Går det att beräkna dimensionen av kolonnrummet till A? Om det det går, beräkna den.

(Läs först avsnitt 4.7 om *radrum*, *kolonnrum* och *nollrum* till matriser och arbeta med de rekommenderade uppgifterna där.)

Rekommenderade uppgifter

Utöver ovanstående seminarieuppgifter rekommenderas följande uppgifter från kursboken till självstudier och övningar:

Kapitel 4 — Allmänna vektorrum		
4.1	Reella vektorrum	3, 5, 9
4.2	Delrum	1, 5, 11, 15
4.3	Linjärt oberoende	3, 5, 9, 11
4.4	Koordinater och baser	3, 5, 11
4.5	Dimension	7, 9, 15, 21
4.6	Basbyte	3, 5b, 7, 9
4.7	Radrum, kolonnrum och nollrum	3, 5, 7, 11, 17
4.8	Rang, nollrumsdimension och de fundamentala matrisrummen	1, 5, 11, 13