KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Modelltentamen
Läsåret 10/11

Skrivtid: 14.00-19.00
Tillåtna hjälpmedel: inga
Examinator: Mats Boij

Tentamen består av nio uppgifter som vardera ger maximalt fyra poäng.

På de tre första uppgifterna, som utgör del A, är det endast möjligt att få 0, 3 eller 4 poäng. Dessa tre uppgifter kan ersättas med resultat från den löpande examinationen. De två kontrollskrivningarna svarar mot uppgift 1 och 2 och seminarierna mot uppgift 3. Godkänd kontrollskrivning eller godkänd seminarieserie ger 3 poäng på motsvarande uppgift och väl godkänd kontrollskrivning eller seminarieserie ger 4 poäng. För att höja från den löpande examinationen från 3 poäng till 4 krävs att hela uppgiften löses. Det är maximum mellan resultatet från den löpande examinationen och resultatet på motsvarande uppgift på tentamen som räknas. Resultat från den löpande examinationen kan endast tillgodoräknas vid ordinarie tentamen och ordinarie omtentamen för den aktuella kursomgången.

De tre följande uppgifterna utgör del B och de tre sista uppgifterna del C, som är främst till för de högre betygen, A, B och C.

Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	27	24	21	18	16	15
varav från del C	6	3	-	-	-	-

Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. Motivera väl! För full poäng på en uppgift krävs att lösningen är välpresenterad och att det finns utförligt med förklarande text till beräkningarna. Lösningar som saknar förklarande text bedöms med högst två poäng.

Var god vänd!

DEL A

(1) Vid lösningen av ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & -3x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = & 1, \\ & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0, \\ 4x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -5, \end{cases}$$

kommer man genom Gausselimination fram till matrisen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right).$$

(a) Skriv upp den matris som hör till det givna systemet och utför de radoperationer som krävs för att få den på trappform. **(1)**

(b) Ange lösningsmängden till ekvationssystemet. **(2)**

(c) Tillhör punkten $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 12, 4, -9)$ lösningsmängden? **(1)**

(2) (a) Avgör för vilka värden på parametern t som de tre vektorerna

$$(1-t, 0, 1, 1), \quad (2, 6-t, 0, 2) \quad \text{och} \quad (1, 4, 1, 3)$$

är linjärt oberoende i $\mathbf{R}^4$. **(3)**

(b) Förklara vad som menas med att tre vektorer i $\mathbf{R}^n$ är linjärt oberoende. **(1)**

(3) (a) Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3)

(b) Förklara varför alla egenvärden till en kvadratisk matris, A, måste uppfylla den *karaktäristiska ekvationen*[1], $\det(A - \lambda I) = 0$. **(1)**

Var god vänd!

[1]också kallad *sekularekvationen* och skrivs ibland $\det(\lambda I - A) = 0$

DEL B

(4) Använd linjen $(x, y, z) = (2, 1, -1) + t(0, 1, -2)$ och punkten $(0, 1, 1)$ för att visa hur man med hjälp av projektion finner den punkt på en given linje som ligger närmast en given punkt. **(4)**

(5) Enligt en modell för en elektrisk krets uppfyller strömmen $i(t)$ uppmätt vid jämna tidsintervall en rekursionsekvation

$$i_{n+2} = ai_{n+1} + bi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

där a och b är konstanter. Vid en mätning har man mätt upp strömmens värde vid ett antal tidpunkter och har därmed mätdata i en vektor $(i_1, i_2, \ldots, i_5)$. Beskriv hur man kan använda minsta-kvadratmetoden för att finna de värden på konstanterna a och b som bäst stämmer överens med mätningarna. Illustrera metoden genom att utföra den i fallet då vi har fem mätvärden $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) = (1, 2, 2, 1, 0)$ mA. **(4)**

(6) (a) Förklara vad som menas med att en avbildning T från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^2$ är linjär. **(1)**

(b) Bestäm matrisen med avseende på standardbasen för den linjära avbildning T från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^2$ som uppfyller

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.$$

(3)

Var god vänd!

DEL C

(7) Vi har två baser i $\mathbf{R}^3$ givna av

$$F = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \quad \text{och} \quad G = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$$

och känner till att en basbytesmatris mellan baserna ges av

$$T = \begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\1 & 0 & 2\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(a) Det är ofta svårt att komma ihåg åt vilket håll basbytet går. Red ut detta genom att använda matrisen ovan för att bestämma koordinaterna relativt basen F för den vektor som har koordinaterna (a, b, c) relativt basen G. **(2)**

(b) Bestäm matrisen för det omvända basbytet. **(2)**

(8) (a) Förklara varför egenvektorer som hör till olika egenvärden till en symmetrisk matris måste vara ortogonala mot varandra. **(2)**

(b) Bestäm en symmetrisk matris med egenvärdena -1 och 4 och där $(4, -3)$ en egenvektor till det första egenvärdet. **(2)**

(9) En *ellips* i planet med centrum i origo kan ses som en nivåkurva till en kvadratisk form, dvs lösningarna till ekvationen $Q(x, y) = k$ för någon kvadratisk form $Q(x, y)$ och någon konstant k. Om vi efter ett ortogonalt koordinatbyte skriver ellipsens ekvation på den *kanoniska* formen

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

där $a \geq b > 0$, kommer den att som bredast vara $2a$ i *storaxelriktningen* och som smalast $2b$ i *lillaxelriktningen*.

(a) Bestäm ekvationen för den ellips som har $a = 5\sqrt{2}$ och $b = 5$ och som har storaxelrikningen $(1, 7)$. **(3)**

(b) Avgör om punkten $(0, 7)$ ligger utanför eller innanför denna ellips. **(1)**