KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag med bedömningskriterier till kontrollskrivning 1
Måndagen den 29 november, 2010

Uppgift

(1) Betrakta det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 8, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$$

(a) Använd Gausselimination för att överföra totalmatrisen för ekvationssystemet till reducerad trappstegsform[1]. **(2)**

(b) Ange lösningmängden för ekvationssystemet med hjälp av den reducerade totalmatrisen. **(1)**

(c) Förklara hur det kommer sig att det finns lösningar till systemet även om man ändrar högerledet. **(1)**

(2) Betrakta triangeln ABC med hörn i punkterna $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, -3, 2)$ och $C = (4, 1, 0)$ i $\mathbb{R}^3$.

(a) Beräkna koordinaterna för vektorerna $\mathbf{u} = \overline{AB}$ och $\mathbf{v} = \overline{AC}$. **(1)**

(b) Använd kryssprodukten för att beräkna arean av triangeln ABC. **(2)**

(c) Använd skalärprodukten för att beräkna cosinus för vinkeln vid hörnet A. **(1)**

(3) Bestäm alla tal t så att punkterna $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 2)$, $(t + 1, 3, t + 2)$ och $(t, 2t, 2t + 5)$ ligger i samma plan i $\mathbb{R}^3$ och ange en ekvation för detta plan för något av dessa värden för t. **(4)**

[1] reduced row-echelon form

LÖSNINGSFÖRSLAG

(1) (a) Totalmatrisen för systemet ges av

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

och med hälp av Gauss-Jordans metod kan vi överföra den till övertriangulär form:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 + r_2 \\ -r_2 \\ r_3 + r_2 \end{bmatrix}$$
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 - \frac{1}{2}r_3 \\ r_2 + \frac{1}{2}r_3 \\ \frac{1}{2}r_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

(b) Eftersom det är en av kolonnerna i koefficientmatrisen som inte har en ledande ett får vi införa en parameter t och sätta $x_3 = t$. De övriga variablerna kan nu direkt lösas ut från de tre ekvationerna som motsvarar raderna i matrisen:

$$x_1 = 3 + x_3 = 3 + t, \quad x_2 = 4 - 2x_3 = 4 - 2t \quad \text{och} \quad x_4 = 5.$$

Lösningsmängden ges därmed av

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 + t, 4 - 2t, t, 5)$$

där t är en reell parameter.

(c) Eftersom det finns en ledande etta i varje rad i koefficientmatrisen kan det aldrig bli en ledande etta i högerledet, oavsätt hur det ser ut. Vi kan därmed finna lösningar för alla möjliga högerled precis som för högerledet $(7, 8, 9)$.

(2) (a) Ortsvektorerna för punkterna ges av vektorerna från origo till respektive punkt, dvs $\overline{OA} = (1, 0, 1)$, $\overline{OB} = (2, -3, 2)$ och $\overline{OC} = (4, 1, 0)$. Eftersom $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$ får vi

$$\mathbf{u} = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (2, -3, 2) - (1, 0, 1) = (1, -3, 1)$$

och på motsvarande sätt

$$\mathbf{v} = \overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = (4, 1, 0) - (1, 0, 1) = (3, 1, -1)$$

(b) För att beräkna arean med hjälp av kryssprodukten använder vi att triangelns area är hälften av arean av den parallellogram som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$. Arean av denna parallellogram ges av normen av kryssprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. VI beräknar kryssprodukten till

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (1, -3, 1) \times (3, 1, -1) = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= ((-3) \cdot (-1) - 1 \cdot 1, -1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3, 1 \cdot 1 - (-3) \cdot 3) = (2, 4, 10) \end{aligned}$$

Normen av denna ges av $|(2, 4, 10)| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 10^2} = \sqrt{120} = 2\sqrt{30}$. Alltså ges arean av triangeln av $\sqrt{30}$ areaenheter.

(c) VI kan beräkna cosinus för vinkeln α vid hörnet A genom

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} = \frac{(1,-3,1)\cdot(3,1,-1)}{\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{1\cdot 3+(-3)\cdot 1+1\cdot(-1)}{11} = -\frac{1}{11}.\end{aligned}$$

(3) Om de fyra punkterna ligger i samma plan finns det en nollskild ekvation $ax+by+cz+d=0$ som alla punkter uppfyller. Detta ger oss ett homogent linjärt ekvationssystem med fyra ekvationer och fyra obekanta, vilket har icketriviala lösningar precis om ekvationerna är linjärt beroende.

Totalmatrisen för ekvationssystemet ges av

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ t+1 & 3 & t+2 & 1 & 0 \\ t & 2t & 2t+5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

och vi kan använda Gausselimination för att se när det finns icke-triviala lösningar:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ t+1 & 3 & t+2 & 1 & 0 \\ t & 2t & 2t+5 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2-2r_1 \\ r_3-(t+1)r_1 \\ r_4-tr_1 \end{bmatrix} \\ \sim &\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1-2t & -1-2t & -t & 0 \\ 0 & 0 & 5-t & 1-t & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -r_2 \\ r_3+(1-2t)r_2 \\ r_4 \end{bmatrix} \sim \\ \sim &\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5+6t & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 5-t & 1-t & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Vi kan i det här läget se att det finns icke-triviala lösningar om och endast om de två sista raderna är linjärt beroende eftersom det redan finns ledande ettor i det två första raderna och motsvarande positioner är noll i de sista två.

Alltså kan vi avgöra detta genom att se på determinanten av 2×2-matrisen

$$\begin{pmatrix} 6t-5 & t-1 \\ 5-t & 1-t \end{pmatrix}$$

som ges av $(6t-5)(1-t)-(t-1)(5-t) = -5t(t-1)$.

Därmed ligger de fyra punkterna i samma plan precis om $t=0$ eller $t=1$. Vi kan sätta in dessa värden på t i totalmatrisen ovan för att beräkna lösningen till systemet. För

$t = 0$ får vi

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

med lösning $d = s$, $c = -\frac{1}{5}s$, $b = -s + \frac{4}{5}s = -\frac{1}{5}s$ och $a = -s + \frac{3}{5}s + \frac{2}{5}s = 0$, där s är en reell parameter. Med $s = 5$ får vi planets ekvartion till $-y - z + 5 = 0$, dvs $y + z = 5$.

Med $t = 1$ får vi

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vilket ger lösning $d = s$, $c = 0$, $b = -s - 4 \cdot 0 = -s$ och $a = -s - 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-s) = s$. Med $s = 1$ får vi planets ekvation till $x - y + 1 = 0$, dvs $x - y = -1$.

Det går också att lösa uppgiften på flera andra sätt, exempelvis genom att använda kryssprodukten mellan vektorer mellan punkterna för att få normalriktningen till ett plan som innehåller tre av de fyra punkterna. Vi får fyra möjliga sätt att välja ut tre av punkterna och alla punkter ligger i samma plan om dessa fyra normalvektorer är parallella.

Vi får då exempelvis kravet att $(1, 1, -1) \times (t, 1, t - 1) = (t, 1 - 2t, 1 - t)$ ska vara parallell med $(1, 1, -1) \times (t - 1, 2t - 2, 2t + 2) = (4t, -1 - 3t, t - 1)$. Vi ser att kvoten i den första positionen är 4 om inte $t = 0$, vilket i den sista positionen leder till att $(t - 1) = 4(1 - t)$. Alltså måste $t = 0$ eller $t = 1$ för att de ska vara parallella. Vi får nu direkt normalvektorerna för planen genom att sätta in $t = 0$ och $t = 1$, vilket ger $(0, 1, 1)$ respektive $(1, -1, 0)$. För att få reda på konstanttermen i ekvationen sätter vi in någon av punkterna, tex $(1, 2, 3)$ och får $y + z = 5$ respektive $x - y = -1$.

Svar:

(1) (a) Den reducerade trappstegsformen är

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

(b) Lösningarna ges av $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 + t, 4 - 2t, t, 5)$, där t är en reell parameter.

(c) Det finns lösning för alla högerled eftersom varje rad har en ledande etta i koefficientmatrisen.

(2) (a) Koordinaterna ges av $\mathbf{u} = (1, -3, 1)$ och $\mathbf{v} = (3, 1, -1)$.

(b) Arean av triangeln är $\sqrt{30}$ areaenheter.

(c) Cosinus för vinkeln är $-1/11$.

(3) Punkterna ligger i ett plan precis om $t = 0$ eller $t = 1$. I det första fallet ges planet av $y + z = 5$ och i det andra av $y - z = -1$.

PRELIMINÄRA BEDÖMNINGSKRITERIER

Mindre räknefel ger i allmänhet inget avdrag om de inte väsentligt ändrar uppgiftens karaktär.

(1) (a)
- Korrekt påbörjad Gausselimination, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd Gauss-Jordanelimination, **1 poäng**.

(b) Korrekt användning av den reducerade totalmarisen för att bestämma lösningmänden, **1 poäng**.

(c) Korrekt motivering till att systemet är lösbart även om högerledet ändras, **1 poäng**.

(2) (a) Korrekt beräkning av koordinaterna för bägge vektorer, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt beräknad kryssrprodukt, **1 poäng**.
- Korrekt användning av kryssprodukten för att beräkna arean, **1 poäng**.

(c) Korrekt beräkning av cosinus för vinkeln mha skalärprodukten, **1 poäng**.

(3)
- Korrekt princip för att avgöra om de fyra punkterna ligger i ett plan, **1 poäng**.
- Korrekt uppställt villkor på t för att de ska ligga i ett plan, **1 poäng**.
- Korrekt motiverade värden på t, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad ekvation för planets ekvation för $t = 0$ eller för $t = 1$, **1 poäng**.