KTH Teknikvetenskap

SF1625 Envariabelanalys
Tentamen 2010-12-15
LÖSNINGSFÖRSLAG

1. **Bestäm de punkter på kurvan $y = \dfrac{9x^2+1}{x}$ där tangenten är horisontell (dvs parallell med x-axeln). Bestäm också tangenternas ekvationer i dessa punkter.**

Lösning: Vi har att $(9x^2+1)/x = 9x + \dfrac{1}{x}$. Låt $f(x) = 9x + \dfrac{1}{x}$. Vi ska studera kurvan $y = f(x)$. Vi ser att f är definierad för alla $x \neq 0$ och $f'(x) = 9 - \dfrac{1}{x^2}$ som existerar för alla $x \neq 0$. Tangenten är horisontell precis när derivatan är noll, och

$$f'(x) = 0 \iff 9 - \frac{1}{x^2} = 0 \iff x = \pm\frac{1}{3}.$$

Vi observerar vidare att $f(1/3) = 6$ och $f(-1/3) = -6$.
Tangenten är alltså horisontell i punkterna $(1/3, 6)$ och $(-1/3, -6)$. Tangenten i den första punkten har ekvation $y = 6$ och tangenten i den andra punkten har ekvation $y = -6$.

Svar: Punkterna är $(1/3, 6)$ och $(-1/3, -6)$. Tangenten i den första punkten har ekvation $y = 6$ och tangenten i den andra punkten har ekvation $y = -6$.

2. **Betrakta integralen $\displaystyle\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.**
A. Använd substitutionen $u = \sqrt{x}$ för att skriva om integralen.
B. Beräkna integralen med hjälp av omskrivningen i uppgift A.

Lösning A och B: Om vi sätter $u = \sqrt{x}$ så är u injektiv på intervallet $[1, 4]$ och $du = dx/2\sqrt{x}$ och $x = 1 \Leftrightarrow u = 1$ och $x = 4 \Leftrightarrow u = 2$ så med hjälp av denna substitution får vi att

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int_1^2 e^u\, du = 2(e^2 - e).$$

Svar A. $2\int_1^2 e^u\, du$. B. $2(e^2 - e)$

3. **Bestäm den lösning $y(t)$ till differentialekvationen $y''(t) + 4y(t) = 4$ som också uppfyller initialvillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 8$.**

Lösning. Först löser vi differentialekvationen fullständigt, lösningen har strukturen $y = y_h + y_p$ där y_h är den allmänna lösningen till den homogena ekvationen och y_p är någon partikulärlösning till den givna ekvationen. Vi ser direkt att vi kan ta $y_p = 1$. För y_h observerar vi att den karaktäristiska ekvationen $r^2 + 4 = 0$ har lösning $r = \pm 2i$ varför $y_h(t) = C\cos 2t + D\sin 2t$, där C och D är godtyckliga konstanter. Vi har alltså att differentialekvationens allmänna lösning är

$$y(t) = 1 + C\cos 2t + D\sin 2t,$$

där C och D är godtyckliga konstanter som vi nu kan bestämma med hjälp av initialvillkoren. Först ser vi att $y(0) = 1 \Leftrightarrow 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0$. Vidare ger $y'(0) = 8$ att $D\cos(2\cdot 0) = 8$ dvs $D = 4$. Lösningen till initialvärdesproblemet i uppgiften är alltså

$$y(t) = 1 + 4\sin 2t.$$

Svar: $y(t) = 1 + 4\sin 2t$.

4. **Differentialekvationen $\dfrac{du}{dt} = -\dfrac{u}{RC}$ beskriver spänningen u vid tiden t när en kondensator med kapacitans C laddas ur över ett motstånd med resistans R. Lös differentialekvationen och bestäm spänningen som funktion av tiden, om $R = 1$, $C = 0.2$ och $u(0) = 10$.**

Lösning. Med $R = 1$ och $C = 0.2$ ska vi alltså lösa differentialekvationen

$$u'(t) + 5u(t) = 0$$

som är en homogen linjär differentialekvation av första ordningen med konstanta koefficienter. Vi använder metoden med karaktäristisk evkation (det finns även andra metoder som funkar). Den karaktäristiska ekvationen $r + 5 = 0$ har lösning $r = -5$ så differentialekvationen har allmän lösning $u(t) = Ce^{-5t}$, där C är en godtycklig reell konstant. Med hjälp av initialvillkoret $u(0) = 10$ kan vi nu bestämma C till 10 och få lösningen på problemet: $u(t) = 10e^{-5t}$.

Svar: $u(t) = 10e^{-5t}$.

5. **Bestäm, för varje positivt heltal n, en primitiv funktion till funktionen f_n, som ges av $f_n(x) = x^n \ln x$.**

Lösning: Vi använder partiell integration och får

$$\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \int \frac{x^n}{n+1} \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$$

där C är en godtycklig konstant.

Svar:De primitiva funktionerna ges av $F_{n,C}(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$, C godtycklig konstant.

6. **Skriv upp en Riemannsumma med fyra delintervall som approximerar integralen $\int_1^3 \frac{dt}{t}$.**

Lösning. Den funktion vi integrerar är $f(t) = 1/t$. Vi delar in integrationsintervallet i fyra lika stora delintervall med längd $1/2 = \Delta x_j$. Delningspunkterna är då $x_0 = 1$, $x_1 = 3/2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5/2$, $x_4 = 3$. Vi väljer att i varje delintervall ta funktionsvärdet i den högra ändpunkten på delintervallet, multiplicerar detta med delintervallets längd och summerar och får då Riemannsumman

$$\sum_{j=1}^{4} f(x_j)\Delta x_j = \frac{1}{3/2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5/2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}.$$

Svar: $\frac{1}{3/2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5/2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ (= 57/60 som är ett närmevärde på integralen).

7. **A. Förklara i vilken mening $\int_0^\infty \frac{x \, dx}{x^4 + 1}$ är en generaliserad integral och beräkna den.**
B. Avgör om serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^4 + 1}$ är konvergent eller divergent.

Lösning. A Integralen är generaliserad då integrationsintervallet är obegränsat. Detta är den enda mening i vilken integralen är generaliserad eftersom funktionen är begränsad på hela integrationsintervallet. Med hjälp av substitutionen $u = x^2$, där u är injektiv på det aktuella intervallet och $du = 2x\,dx$ och gränserna blir oförändrade, får vi

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}(\arctan R - \arctan 0) = \frac{\pi}{4}$$

Lösning B. Eftersom $0 \leq \dfrac{k}{k^4+1} \leq \dfrac{1}{k^3}$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ är konvergent, får vi att vår serie också är konvergent.

Svar: A. Generaliserad pga obegränsat integrationsintervall, integralens värde är $\pi/4$. B. Konvergent.

8. **Bestäm en approximation av $\displaystyle\int_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx$ som ligger högst en hundradel från det verkliga värdet.**

Lösning. Med hjälp av Maclaurinutveckling vet vi att $e^t = 1 + t + \frac{e^\xi}{2}t^2$ för något ξ mellan 0 och t. Genom att substituera $-x^2 = t$ får vi

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{e^\xi}{2}x^4$$

för något tal ξ mellan 0 och $-x^2$. Vi får approximationen

$$\int_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^{1/4} (1-x^2)\,dx = [x - x^3/3]_0^{1/4} = \frac{47}{192}.$$

Om ξ ligger mellan 0 och $-x^2$ där $0 \leq x \leq 1/4$ så är $|e^\xi| \leq 3$ så felet vi gör när vi approximerar vår integral med 47/192 är till absolutbeloppet mindre än $\int_0^{1/4} \frac{3}{2}x^4\,dx = [3x^5/10]_0^{1/4} = \frac{3}{10\cdot 4^5} < 0.01$.

SVar: Approximationen $\displaystyle\int_0^{1/4} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{47}{192}$ ligger inom en hundradel från det verkliga värdet.

9. **Bestäm värdemängden till funktionen $f(x) = \arcsin(2x^2-1) + 2\arccos x$, $0 \leq x \leq 1$.**

Lösning. Vi ser först att f är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[0,1]$. Vi deriverar och får

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-(2x^2-1)^2}} \cdot 4x - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

som existerar för alla x sådana att $0 < x < 1$. Efter förenkling ser vi att $f'(x) = 0$ då $0 < x < 1$ och med hjälp av detta drar vi slutsatsen att funktionen f är konstant på intervallet $[0,1]$. Värdemängden består alltså av ett enda tal. För att se vilket tal det är räknar vi ut funktionsvärdet i någon punkt, säg $x = 0$. Eftersom $f(0) = \arcsin(-1) + 2\arccos(0) = \pi/2$ får vi att värdemängden till funktionen f är $\{\pi/2\}$.

Svar: $\{\pi/2\}$.