KTH Teknikvetenskap

SF1624 ALGEBRA OCH GEOMETRI
SEMINARIEUPPGIFT 2
PERIOD 3, VT11

Se www.kth.se/social/course/SF1624 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

UPPGIFTER TILL SEMINARIE 2

Uppgift 1. Beräkna determinanten av

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

och diskutera fördelar och nackdelar med att använda kofaktorutveckling jämfört med rad- och/eller kolonnoperationer för att beräkna denna determinant. (Läs först avsnitt 2.1 och 2.2 och arbeta med de rekommenderade uppgifterna där.)

Uppgift 2. Bestäm en ekvation för det plan som innehåller de båda linjerna $(x, y, z) = (0, -2, 5) + t \cdot (2, 1, -1)$ och $(x, y, z) = (3, 1, 0) + t \cdot (-4, -2, 2)$.

(Två linjer i rummet ligger oftast inte samma plan. Om de gör det är de antingen parallella eller skär varandra i en punkt. Linjer som inte skär varandra kallas *skeva linjer*. Läs avsnitt 3.3 om linjer och plan och arbeta med de rekommenderade uppgifterna där. Tänk på att det kan vara till stor hjälp att rita bra figurer när man hanterar geometriska problem.)

Uppgift 3. Beräkna det kortaste avståndet mellan linjerna som ges av $(x, y, z) = (1, 0, -1) + t \cdot (2, 0, 1)$ och $(x, y, z) = (3, 1, 0) + t \cdot (1, 1, -1)$, där t är en reell parameter. Mellan vilka punkter på linjerna är avståndet kortast? (För två skeva linjer finns en unik riktning som är vinkelrät mot båda. Man kan använda detta för att hitta två parallella plan, ett som innehåller den ena linjen och ett som innehåller den andra. Det går att använda linjära ekvationessystem eller kryssprodukt för att bestämma normalriktningen till de bägge planen.)

Uppgift 4. En ogenomskinlig triangulär skiva med hörn i punkterna $P = (-4, -5, 5)$, $Q = (0, -2, 3)$ och $R = (2, 14, 1)$ belyses av en punktformig ljuskälla i punkten $S = (-10, -10, 10)$. Skivan kastar en triangulär skugga i xy-planet. Beräkna skuggans area. (Läs först avnitt 3.4 och 3.5 och arbeta med uppgifterna där. Arean av triangel kan beräknas med hjälp av kryssprodukt eller om den ligger i planet med hjälp av determinant.)

Uppgift 5. Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

som förekommer vid anpassning av linjer till mätdata.

(a) Beräkna $\det(A^T A)$.
(b) Beräkna $\det(AA^T)$.
(c) Red ut hur motsvarande resultat blir för större matriser av samma slag, dvs för

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

där n är något heltal större än eller lika med 5. (I avsnitt 3.4 talas om hur matrismultiplikationen kan tolkas som ett antal skalärprodukter. Se på vad som händer med $\det(AA^T)$ när man utför radoperationer på A och vad som händer med $\det(A^T A)$ när man utför kolonnoperationer på A.)

Rekommenderade uppgifter

Utöver ovanstående seminarieuppgifter rekommenderas följande uppgifter från kursboken till självstudier och övningar:

Kapitel 2 — Determinanter		
2.1	Determinanter och kofaktorutveckling	3ab, 11, 22, 31
2.2	Beräkning av determinanter med hjälp av radoperationer	3, 14, 21, 25
2.3	Egenskaper hos determinanter och Cramers regel	3, 9, 17, 25, 30
Kapitel 3 — Euklidiska vektorrum		
3.1	Vektorer i planet, rummet och det n-dimensionella rummet	7b, 11b, 21, 31
3.2	Längd, skalärprodukt och avstånd i $\mathbb{R}^n$.	1, 7, 11b, 17, 25b
3.3	Ortogonalitet	1cd, 7, 13, 19b, 29, 37
3.4	Geometrin hos linjära ekvationssystem	1, 5, 13, 17, 23
3.5	Kryssprodukt	1b, 11, 15, 19, 29, 33