KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Bedömningskriterier till tentamen
Måndagen den 10 januari, 2011

Allmänt gäller följande:

- Om lösningen helt saknar förklarande text till beräkningar och formler ges högst två poäng. Detta markeras vid bedömningen med "FTS" (Förklarande text saknas).
- Om lösningen har förklarande text men inte tillräckligt för att det ska gå att förstå alla steg ges högst tre poäng sammanlagt på uppgiften. Detta markeras med "FLFT" (För lite förklarande text).
- Mindre räknefel ger i allmänhet inte avdrag om de inte ändrar uppgiftens karaktär eller leder till orimligheter som borde ha upptäckts.

DEL A

(1) De tre totalmatriserna

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \text{ och } \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

svarar mot linjära ekvationssystem i fem obekanta x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

(a) En av matriserna är på *reducerad trappstegsform*[1]. Vilken? **(1)**

(b) Välj någon av matriserna och använd denna för att bestämma lösningsmängden till motsvarande ekvationssystem. **(2)**

(c) Avgör om någon av de andra två matriserna svarar mot ett linjärt ekvationssystem med samma lösningsmängd. **(1)**

Bedömning:

(a) • Korrekt svar, **1 poäng**.

(b) • Korrekt införda parametrar, **1 poäng**.
• Korrekt beräknad lösningsmängd, **1 poäng**.

(c) • Korrekt motiverat svar, **1 poäng**.

[1] eng. *reduced row-echelon form*

---

(2) Den linjära avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uppfyller att

$$T(1,2) = (3,1,4) \quad \text{och} \quad T(1,1) = (2,1,3).$$

(a) Bestäm standardmatrisen för avbildningen T. **(3)**

(b) Bestäm en bas för *bildrummet*[2] till T. **(1)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt idé om vad standardmatrisen är, **1 poäng**.
- Korrekt metod för att bestämma standardmatrisen, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av standardmatrisen, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt motiverad bas för bildrummet, **1 poäng**.

---

(3) Vektorerna $\mathbf{v} = (1,1,0)$ och $\mathbf{w} = (0,-1,1)$ spänner upp ett plan W i $\mathbb{R}^3$.

(a) Bestäm en vektor $\mathbf{u}_1$ som är parallell med $\mathbf{v}$, och som har längd 1. **(1)**

(b) Bestäm en vektor $\mathbf{u}_2$ så att $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ utgör en ortonormal bas för planet W. **(2)**

(c) När vi beräknar kryssprodukten $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ får vi en normalvektor till W som redan är *normerad*, dvs som har längd 1. Varför? **(1)**

Bedömning:

(a)
- korrekt normerad vektor $\mathbf{u}_1$, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt beräknad vektor i planet som är ortogonal mot $\mathbf{u}_1$, **1 poäng**.
- Korrekt normerad $\mathbf{u}_2$, **1 poäng** .

(c)
- Korrekt motivering till varför $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ har längd ett, **1 poäng**.

---

[2] eng. *range*

DEL B

(4) En linje $y = kx + m$ ska anpassas till punkterna $(-2, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 2)$ och $(7, 6)$.

(a) Bestäm de värden på konstanterna k och m som ger bäst anpassning i minsta-kvadratmening. **(3)**

(b) Rita ut linjen tillsammans med punkterna i ett koordinatsystem och illustrera vad det är som har minimerats för dessa värden på konstanterna. **(1)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt uppställt överbestämt system, **1 poäng**.
- Korrekt beräknad normalekvation, **1 poäng**.
- Korrekt lösning av normalekvationen, **1 poäng**.
- Korrekt formulering av vad som minimeras, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt formulering av vad som minimeras, **1 poäng**.

---

(5) (a) Förklara varför matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & a & 2 \end{pmatrix}$$

är ortogonalt diagonaliserbar precis bara om $a = 0$. **(1)**

(b) Bestäm då $a = 0$ en ortogonal matris P sådan att $P^T AP$ blir diagonal. **(3)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt motivering till varför matrisen är ortogonalt diagonaliserbar bara när $a = 0$, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt bestämda egenvärden, **1 poäng**.
- Korrekt bestämda egenvektorer, **1 poäng**.
- Korrekt bestämd ortononal matris, **1 poäng**.

---

(6) För alla heltal $n \geq 2$, låt A_n vara $n \times n$-matrisen som man får om man skriver upp talen $1, 2, \ldots, n^2$ i ordning, rad för rad. Till exempel är

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna $\det A_2$. **(1)**

(b) Beräkna $\det A_3$ med hjälp av radoperationer. **(1)**

(c) Visa att $\det A_n = 0$ för $n > 3$ genom att påvisa ett linjärt beroende mellan kolonnerna. **(2)**

Bedömning:

(a)
- Korrekt beräknad $\det A_2$, **1 poäng**.

(b)
- Korrekt beräkning av $\det A_3$ med radoperationer, **1 poäng**.

(c)
- Korrekt motiverat linjärt beroende, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats givet det linjära beroendet, **2 poäng**.

DEL C

(7) Bestäm kortaste avståndet mellan punkten $(7, 6, 5)$ och skärningslinjen mellan planen $2x - z = -1$ och $y = 2$ i $\mathbb{R}^3$. **(4)**

Bedömning:

- Korrekt beräknad riktningsvektor till linjen, **1 poäng**.
- Korrekt parameterframställning av linjen, **1 poäng**.
- Korrekt kortaste vektor mellan linjen och punkten, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av avståndet, **1 poäng**.

(8) Låt V vara vektorrummet av symmetriska 2×2-matriser, och låt $T : V \to V$ vara avbildningen som som ges av $T(A) = PAP$ för alla A i V, där

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Visa att

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

är en bas för V. **(1)**

(b) Visa att T är en linjär avbildning från V till V. **(1)**

(c) Bestäm matrisen för T med avseende på basen B. **(2)**

Bedömning:

(a) • Korrekt motiverering till att B är en bas för V, **1 poäng**.

(b) • Korrekt motivering till att T är en linjär avbildning från V till V, **1 poäng**.

(c) • Korrekt metod för att bestämma matrisen för T med avseende på basen B, **1 poäng**.
• Korrekt slutförd beräkning av matrisen, **1 poäng**.

(9) Betrakta matrisekvationen

$$A^3 = 2A^2 - A.$$

(a) Ge ett exempel på en 3×3-matris som uppfyller ekvationen och som varken är nollmatrisen eller identitetsmatrisen. **(1)**

(b) Visa att 0 och 1 är de enda möjliga egenvärdena för kvadratiska matriser som uppfyller ekvationen oavsett storlek. **(3)**

Bedömning:

(a) • Korrekt motiverat exempel, **1 poäng**.

(b) • Korrekt ansats med att välja en egenvektor $\mathbf{v}$ som har egenvärde λ, **1 poäng**.
• Korrekt motiverad slutsats om att $\lambda^3\mathbf{v} = 2\lambda^2\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v}$, **1 poäng**.
• Korrekt motiverad slutsats om att λ måste vara noll eller ett, **1 poäng**