KTH Teknikvetenskap

SF1624 ALGEBRA OCH GEOMETRI
SEMINARIEUPPGIFT 4
PERIOD 3, VT11

Se www.kth.se/social/course/SF1624 för information om hur seminarierna fungerar och vad du förväntas göra inför och under seminarierna.

UPPGIFTER TILL SEMINARIE 4

Uppgift 1. Bestäm standardmatrisen för en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ som uppfyller

$$T(1,0,-1) = (2,1), \qquad T(1,-1,0) = (1,3) \quad \text{och} \quad T(0,1,-1) = (1,-2).$$

(Läs först avsnitten 4.9 och 4.10 och arbeta med de rekommenderade uppifterna där. Det finns flera lösningar på uppgiften. Se exempel 2 i avsnitt 1.6 för att se hur man löser system med flera högerled samtidigt.)

Uppgift 2. En linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras genom att varje vektor i $\mathbb{R}^3$ speglas i planet $2x - 2y + z = 0$.

(a) Använd geometriska resonemang för att beräkna $T(2,1,1)$.
(b) Bestäm avbildningens matris med avseende på någon bas.

Uppgift 3. Vi betraktar en sammansatt avbildning $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T = T_2 \circ T_1$ där T_1 svarar mot spegling i origo medan T_2 definieras genom att varje vektor i $\mathbb{R}^3$ projiceras ortogonalt på planet $2x - 2y + z = 0$.

(a) Bestäm nollrummet (kernel), till avbildningearna T_1, T_2 och T.
(b) Bestäm värderummet (range), till avbildningarna T_1, T_2 och T.
(c) Bestäm en matrisrepresentation för T med avseende på någon bas B, dvs matrisen $[T]_{B,B}$ enligt notationen i boken.

Uppgift 4. Betrakta matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Vi tänker oss att $A = [T]_{B',B}$ representerar en linjär avbildning $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, med avseende på två baser B och B'.

(a) Om B och B' båda är standardbasen, beskriv geometrisk vad avbildningen T gör med planet. Rita speciellt ut vad som händer med enhetskvadraten med hörn i punkterna $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ och $(0,1)$.

(b) Låt T vara projektionen ned på linjen $x = y$. Varför finns det inte baser B och B' sådan att $A = [T]_{B',B}$?

Uppgift 5. Låt $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning, och betrakta matrisrepresentationer med avseende på en och samma bas B för både domän och målmängd. (Med notation från boken så menas nu matriser på formen $[T]_{B,B}$).

(a) Låt B vara en bas sådan att

$$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Visa att det finns en bas B' sådan att

$$[T]_{B',B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Redogör varför matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ och matrisen $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ inte kan representera samma avbildning. Dvs, det finns ingen bas B sådan att $A = [T]_{B,B}$ och en bas B' sådan att $A' = [T]_{B',B'}$ för en och samma avbildning T.

Rekommenderade uppgifter

Utöver ovanstående seminarieuppgifter rekommenderas följande uppgifter från kursboken till självstudier och övningar:

Kapitel 4 — Allmänna vektorrum		
4.9	Matristransformationer från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$	9, 11, 17, 21
4.10	Egenskaper hos matristransformationer	5, 9, 15, 21, 23
Kapitel 8 — Linjära avbildningar		
8.1	Allmänna linjära avbildningar	7, 11, 13, 23
8.2	Isomorfier	5, 9, 11, 17
8.3	Sammansättning av linjära avbildningar	3, 9, 15
8.4	Matriser för allmäna linjära avbildningar	5, 7, 13