KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Lösningsförslag med bedömningskriterier till modellkontrollskrivning 1
2010

UPPGIFT

a) Betrakta ekvationssystemet som på matrisform ges av

$$\begin{pmatrix} -2+t & 12-6t & 0 \\ -3 & 7-4t & -1+t \\ 8-4t & -12+6t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Visa att ekvationssystemet har en unik lösning om t inte är lika med 1 eller 2 och avgör för vilka värden på t har ekvationssystemet en en-parametrig lösning? **(4)**

b) Använd vektorprodukten för att bestämma ekvationerna för två parallella plan, ett som innehåller linjen $(x, y, z) = (1, 2, 0) + t(1, 2, -1)$ och ett som innehåller linjen $(x, y, z) = (5, 1, 2) + t(2, 2, 1)$. **(4)**

c) Beräkna determinanten av matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

genom utveckling efter andra kolonnen och genom Gausselimination. **(4)**

a) Det finns en unik lösning till ett homogent linjärt ekvationssystem med kvadratisk koeficientmatris om och endast om dess determinant är skild ifrån noll. Vi beräknar därför matrisens deteriminant och får

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -2+t & 12-6t & 0 \\ -3 & 7-4t & -1+t \\ 8-4t & -12+6t & 0 \end{vmatrix} &= (-1)(t-1)\begin{vmatrix} t-2 & 12-6t \\ 8-4t & -12+6t \end{vmatrix} \\ &= -(t-1)(t-2)^2\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -(t-1)(t-2)^2\cdot(6-24) = 23(t-1)(t-2)^2\end{aligned}$$

där vi först utvecklade determinanten efter tredje kolonnen och sedan bröt ut de gemensamma faktorerna $t-2$ från bägge raderna. Determinanten är därmed skild från noll precis om t inte är 1 eller 2, vilket skulle visas.

Det räcker nu att se på de två fall då det inte finns unik lösning. För $t = 1$ får vi ekvationssystemet med totalmatris

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 6 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} -r_1 \\ r_2+3r_1 \\ r_3-4r_1 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ -\frac{1}{15}r_2 \\ r_3+\frac{6}{5}r_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och det blir en en-parametrig lösning eftersom det saknas ledande etta i precis en av kolonnerna i vänsterledet.

För $t = 2$ får vi istället

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}r_2 \\ r_1 \\ r_3 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

som ger en två-parametrig lösing eftersom det saknas ledande etta i två av kolonnerna.

b) Normalen till ett plan som innehåller en linje måste vara vinkelrät mot linjens riktningsvektor. Eftersom parallella plan har samma normalvektor måste normalen till de sökta planen vara ortogonal mot båda linjernas riktningsvektorer. Vi kan därför använda vektorprodukten för att finna normalvektorn:

$$\begin{aligned}\overline{n} &= \overline{u}\times\overline{v} = (1,2,-1)\times(2,2,1) \\ &= (2\cdot 1-(-1)\cdot 2, (-1)\cdot 2-1\cdot 1, 1\cdot 2-2\cdot 2) = (4,-3,-2)\end{aligned}$$

Ekvationerna för de bägge planen kan nu skrivas

$$4x-3y-2z = d \quad \text{och} \quad 4x-3y-2z = e$$

för konstanter d och e. För att bestämma dessa konstanter kan vi sätta in en punkt från varje plan och vi får då

$$d = 4\cdot 1-3\cdot 2-2\cdot 0 = 4-6-0 = -2$$

och

$$e = 4\cdot 5-3\cdot 1-2\cdot 2 = 20-3-4 = 13.$$

Alltså är de två planens ekvationer

$$4x - 3y - 2z = -2 \quad \text{och} \quad 4x - 3y - 2z = 13.$$

c) Om vi använder Gausselimination för att bestämma determinanten får vi

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = [\text{lägg 3/2 ggr rad 1 till rad 3}] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 4 \end{vmatrix}$$

$$= [\text{byt rad 3 och 4}] = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -42 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (-42) = 42.$$

När vi beräknar determinanten genom att utveckla efter den andra kolonnen får vi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(4 \cdot 4 - 2 \cdot 1) - ((-3) \cdot 4 - 2 \cdot 1)$$

$$= 2 \cdot 14 - (-14) = 42,$$

vilket stämmer med resultatet från Gausseliminationen.

Svar:

a) Det finns en en-parametrig lösning precis om $t = 1$.
b) De två planens ekvationer är $4x - 3y - 2z = -2$ och $4x - 3y - 2z = 13$.
c) Determinantens värde är 42.

BEDÖMNINGSKRITERIER

Mindre räknefel ger i allmänhet inget avdrag, men de måste i så fall identifieras och markeras tydligt vid egenbedömningen.

a)
- Korrekt motivering till att det finns en unik lösning om $t \neq 1$ och $t \neq 2$, **2 poäng**.
- Korrekt beräkning av antalet parametrar för $t = 1$ eller $t = 2$, **1 poäng**.
- Korrekt motiverad slutsats, **1 poäng**.

b)
- Korrekt beräknad vektorprodukt, **1 poäng**.
- Korrekt ekvation för ett av planen, **1 poäng**.
- Korrekt ekvation för det andra planet, **1 poäng**.

c)
- En korrekt radoperation, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av determinanten med hjälp av Gausselimination, **1 poäng**.
- Korrekt utveckling efter andra kolonnen, **1 poäng**.
- Korrekt slutförd beräkning av determinanten, **1 poäng**.